Haladvány Kiadvány 2019-06-09

Egy hatszög mikor egy kocka árnyéka?

Hujter Mihály `hujter.misi@gmail.com`

Tartalmi összefoglaló: Tekintsünk egy tömör, átlátszatlan kockát lebegni általános helyzetben. A kocka árnyéka a nap irányára merőleges helyzetű síkon olyan centrálszimmetrikus hatszög, melynek mindegyik szöge tompaszög. Egy pár napja megjelent dolgozat szerint a hatszög oldalainak hossza meghatározza a kocka méretét. A jelen írásból kiderül, hogy a hatszög szögei is meghatározhatók az oldalak hosszából.

Matematikai megfogalmazás. Közismert tény, hogy az xyz-koordinátarendszerben egy általános helyzetű kocka merőleges vetülete az xy-síkra egy centrálszimmetrikus hatszög, melynek mindegyik szöge tompaszög. A hatszög oldalhosszai sorban p, q, r, p, q, r. Egy pár napja megjelent dolgozat [1] szerint a kocka élhossza $\sqrt{\left(p^2+q^2+r^2\right)/2}$. A p és a q hosszúságú hatszög-oldalak közti tompaszöget jelölje ϑ. Bizonyítani fogjuk a következő képletet:

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{\left(p^2+q^2\right)^2 - r^4}}{2pq}$$

A fenti képlet bizonyítása. Mivel [1] szerint $p^2+q^2+r^2$ éppen a kocka lapátlóhosszának a négyzete, ezért az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $p^2+q^2+r^2 = 2$, azaz az egységnyi élű kocka árnyékát tekintjük. Nyilván p, q, r

mindegyike szigorúan 0 és 1 közötti. Mivel a kocka nagyítása vagy kicsinyítése nem változtatja meg a $\sin\vartheta$-ra vonatkozó fenti képlet jobb oldalát, ezért elegendő az egységnyi élű kocka esetével foglalkoznunk. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy a kocka egyik csúcsa az origó, az egyik szomszédos csúcs pedig (x_1, y_1, z_1), ahol $x_1 = p$, $y_1 = 0$, $z_1 = \sqrt{1-p^2}$. Az origóval szomszédos másik két kockacsúcs (x_2, y_2, z_2) és (x_3, y_3, z_3), ahol $x_2^2+y_2^2 = q^2$ és $x_3^2+y_3^2 = r^2$. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy z_2 és z_3 is pozitív. A kockaélek egységnyi voltából következően $z_2 = \sqrt{1-q^2}$, $z_3 = \sqrt{1-r^2}$. Mivel az origóból induló három kockaél páronként merőleges egymásra, ezért

$$\begin{aligned} x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 &= 0 \\ x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 &= 0 \\ x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 &= 0 \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} px_2 + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)} &= 0 \\ px_3 + \sqrt{(1-p^2)(1-r^2)} &= 0 \\ x_2x_3 + y_2y_3 + \sqrt{(1-q^2)(1-r^2)} &= 0 \end{aligned}$$

Most felírjuk a koszinusztételt az xy-síkon arra a háromszögre, melynek két oldala a hatszög p illetve q hosszúságú oldala:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos\vartheta$$

Mivel $x_1 = p$, $y_1 = 0$ és $y_2^2 = q^2 - x_2^2$, ezért a koszinusztétel ezt adja:

$$(p - x_2)^2 + q^2 - x_2^2 - p^2 - q^2 + 2pq\cos\vartheta = 0$$

Egyszerűsítés után ebből kinyerjük, hogy $x_2 = q\cos\vartheta$. Ezt visszaírva abba a fenti egyenletbe, mely x_2-t tartalmazza, a következőhöz jutunk:

$$pq\cos\vartheta + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)} = 0$$

Ebből megkapjuk, hogy

$$4p^2q^2\left(1-\sin^2\vartheta\right)=(2-2p^2)(2-2q^2)$$

Mivel $p^2+q^2+r^2=2$, ezért

$$(2-2p^2)(2-2q^2)\ =(-p^2+q^2+r^2)(p^2-q^2+r^2)$$

Mindazonáltal megkapjuk, hogy

$$\sin\vartheta=\frac{\sqrt{\left(p^2+q^2\right)^2-r^4}}{2pq}$$

A képletek érdekes szimmetriája. Tekintetbe véve, hogy a centrálszimmetrikus hatszögekben három közvetlenül egymásutáni szög összege 2π, az imént bizonyított képlet egy érdekes tulajdonsága mutatkozik meg. Kiindulva abból, hogy

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{\left(p^2+q^2\right)^2 - r^4}}{2pq}$$

hamar megkapjuk, hogy

$$-\cos\vartheta = \frac{\sqrt{r^4 - \left(p^2-q^2\right)^2}}{2pq}$$

Ha $p^2+q^2+r^2=2$, akkor a képletek tovább egyszerűsödnek:

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{1-r^2}}{pq} \qquad -\cos\vartheta = \frac{\sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}}{pq}$$

Ha a következő két szöget ϑ' illetve ϑ'' jelöli, akkor a fentiekhez hasonlóan

$$\sin\vartheta' = \frac{\sqrt{1-p^2}}{qr} \qquad -\cos\vartheta' = \frac{\sqrt{(1-q^2)(1-r^2)}}{qr}$$

$$\sin\vartheta'' = \frac{\sqrt{1-q^2}}{rp} \qquad -\cos\vartheta'' = \frac{\sqrt{(1-r^2)(1-p^2)}}{rp}$$

Az addíciós képlet alapján

$$\begin{aligned} & -\sin\left(\vartheta' + \vartheta''\right) \\ = \; & \frac{\sqrt{1-p^2}}{qr} \cdot \frac{\sqrt{(1-r^2)(1-p^2)}}{rp} + \frac{\sqrt{(1-q^2)(1-r^2)}}{qr} \cdot \frac{\sqrt{1-q^2}}{rp} \\ = \; & \frac{(2-p^2-q^2)\sqrt{1-r^2}}{pqr^2} \end{aligned}$$

Mivel $2 - p^2 - q^2 = r^2$, megkaptuk, hogy $-\sin(\vartheta' + \vartheta'') = \sin\vartheta$. Mivel ϑ, ϑ', ϑ'' mindegyike tompaszög, az egyenlőség azzal egyenértékű, hogy $\vartheta + \vartheta' + \vartheta'' = 2\pi$.

Szükséges és elégséges feltételek. Legyenek $p \le q \le r$ pozitív számok, a monotonitástól eltekintve tetszőlegesen megválasztva. Most összefoglaljuk, hogy mik a szükséges és elégséges feltételei annak, hogy egy pozitív vagy negatív körüljárás szerint p, q, r, p, q, r oldalú, minden csúcsánál tompaszögű, centrálszimmetrikus hatszög valamely alkalmas kocka merőleges vetülete lehessen. A kocka élhossza $\sqrt{\left(p^2 + q^2 + r^2\right)/2}$, ezért szükséges $r < \sqrt{\left(p^2 + q^2 + r^2\right)/2}$ azaz $r^2 < p^2 + q^2$. A hatszög szögei a fentiek szerint egyértelműen meghatározottak, tehát a p, q, r sorozat egybevágóság szempontjából meghatározza a hatszöget. Állítjuk, hogy a felsorolt feltételek elégségesek is. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $p^2 + q^2 + r^2 = 2$. Egy megfelelő kockát négy csúcsával, nevezetesen a fentiek szerint az origóval, továbbá az (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) és (x_3, y_3, z_3) pontokkal definiálunk, ahol $x_1 = p < 1$, $y_1 = 0$, $z_1 = \sqrt{1-p^2} > 0$, $z_2 = \sqrt{1-q^2} > 0$, $z_3 = \sqrt{1-r^2} = \sqrt{p^2+q^2-1} > 0$, $x_2^2 + y_2^2 = q^2$ és $x_3^2 + y_3^2 = r^2 = 2 - p^2 - q^2$. Amint fent megállapítottuk,

$$x_2 = q\cos\vartheta = q \cdot \frac{-\sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}}{pq} = \frac{-\sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}}{p}$$

Következésképpen

$$y_2^2 = q^2 - x_2^2 = q^2 - \frac{(1-p^2)(1-q^2)}{p^2} = \frac{p^2+q^2-1}{p^2}$$

A kockának az árnyékán (azaz az xy-síkra való merőleges vetületén) a p, q, r, p, q, r hosszúságú oldalak körüljárási iránya attól függ, hogy y_2 értéke pozitív-e vagy negatív. Ha pozitív, akkor a fentiekből $y_2 = \sqrt{p^2+q^2-1}/p$.

A fentiekhez hasonlóan megkapható, hogy

$$x_3 = r\cos\vartheta'' = r\cdot\frac{-\sqrt{(1-r^2)(1-p^2)}}{rp} = \frac{-\sqrt{(1-r^2)(1-p^2)}}{p}$$

$$\begin{aligned} y_2^2 &= 2-p^2-q^2-\frac{(1-r^2)(1-p^2)}{p^2} \\ &= 2-p^2-q^2-\frac{(p^2+q^2-1)(1-p^2)}{p^2} = \frac{1-q^2}{p^2} \end{aligned}$$

Tehát vagy $y_3 = \sqrt{1-q^2}/p$, vagy $y_3 = -\sqrt{1-q^2}/p$. Mivel teljesülni kell a $x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 = 0$ egyenletnek is, és itt x_2 és x_3 negatív, y_2, z_2 és z_3 pozitív, tehát y_3-nak negatívnak kell lennie, azaz $y_3 = -\sqrt{1-q^2}/p$.

A kocka egyik csúcsa tehát az origó, a szomszédos három csúcs koordinátái pedig a következő oszlopok:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ \sqrt{1-p^2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}/p \\ \sqrt{p^2+q^2-1}/p \\ \sqrt{1-q^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{(p^2+q^2-1)(1-p^2)}/p \\ -\sqrt{1-q^2}/p \\ \sqrt{p^2+q^2-1} \end{bmatrix}$$

Azt könnyen ellenőrizhetjük, hogy ezek az origóval együtt valóban egy egységnyi élű kocka négy csúcsát alkotják. Valóban

$$\begin{aligned}
x_1^2+y_1^2+z_1^2 &= p^2+0+1-p^2=1\\
x_2^2+y_2^2+z_2^2 &= \frac{(1-p^2)(1-q^2)}{p^2}+\frac{p^2+q^2-1}{p^2}+1-q^2=1\\
x_3^2+y_3^2+z_3^2 &= \frac{(p^2+q^2-1)(1-p^2)}{p^2}+\frac{1-q^2}{p^2}+\left(p^2+q^2-1\right)\\
&= 1
\end{aligned}$$

továbbá

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=-\sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}+0+\sqrt{1-p^2}\cdot\sqrt{1-q^2}=0$$

$$\begin{aligned}
x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3 &= -\sqrt{(p^2+q^2-1)(1-p^2)}+0+\sqrt{1-q^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2-1}\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3}{} \\
=\ & \frac{\sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}\cdot\sqrt{(p^2+q^2-1)(1-p^2)}}{p^2}- \\
& \frac{\sqrt{p^2+q^2-1}\cdot\sqrt{1-q^2}}{p^2}+\sqrt{1-q^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2-1} \\
=\ & \left(\left(\frac{1}{p^2}-1\right)+\frac{1}{p^2}+1\right)\cdot\sqrt{1-q^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2-1}=0
\end{aligned}
$$

Most a kocka említett négy csúcsának a merőleges vetülete az xy-síkon: $(0,0)$, $(x_1,y_1) = (p,0)$, $(x_2,y_2) = \left(-\sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}/p, \sqrt{p^2+q^2-1}/p\right)$, $(x_3,y_3) = \left(\sqrt{1-q^2}, \sqrt{p^2+q^2-1}\right)$. A kocka vetületének középpontja nyilván az $((x_1+x_2+x_3)/2, (y_1+y_2+y_3)/2)$ pont. Most tekintsük a α,β,γ

ismeretlenekre az

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma &= 1\\ \alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3 &= 0\\ \alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3 &= 0\end{aligned}$$

egyenletrendszert. A konkrét megoldás-értékek nem fontosak számunkra, de az igen, hogy α, β, γ mindegyike pozitív szám lesz. Ez azt jelenti, hogy $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ és (x_3, y_3) olyan háromszöget alkot, melynek a belsejében van az origó. Az origóval átellenes kockacsúcs vetülete a xy-síkon $(x_1+x_2+x_3, y_1+y_2+y_3)$. Nyilván ez az (x_2+x_3, y_2+y_3), (x_3+x_1, y_3+y_1) és (x_1+x_2, y_1+y_2) pontok alkotta háromszög belsejében van.

Megkaptuk tehát, hogy a kocka vetülete az xy-síkra az (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_2+x_3, y_2+y_3), (x_3+x_1, y_3+y_1) és (x_1+x_2, y_1+y_2) pontok konvex burka.

Most ellenőrizzük, hogy ez a hat pont tényleg az előírt sorrendben alkotja-e a hatszöget. Az (x_1, y_1) és $(x_3 + x_1, y_3 + y_1)$ pontok távolságának négyzete:

$$\begin{aligned} & (x_1 - (x_3 + x_1))^2 + (y_1 - (y_3 + y_1))^2 \\ = \;& x_3^2 + y_3^2 \\ = \;& \frac{(p^2 + q^2 - 1)(1 - p^2)}{p^2} + \frac{1 - q^2}{p^2} = 2 - p^2 + q^2 = r^2 \end{aligned}$$

Tehát az (x_1, y_1) és $(x_3 + x_1, y_3 + y_1)$ pontok között van az egyik r hosszúságú oldal. A másik r hosszúságú oldal ennek a tükörképénél van, tehát az $(x_2 + x_3, y_2 + y_3)$ és az (x_2, y_2) pontok között. Az (x_1, y_1) és az $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ pontok közötti távolság négyzete:

$$\begin{aligned} & (x_1 - (x_1 + x_2))^2 + (y_1 - (y_1 + y_2))^2 \\ = \;& x_2^2 + y_2^2 \\ = \;& \frac{(1 - p^2)(1 - q^2)}{p^2} + \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2} = q^2 \end{aligned}$$

Tehát az (x_1, y_1) és az (x_1+x_2, y_1+y_2) pontok közötti távolság q, és nyilván ugyanez igaz a tükörképekre, azaz az (x_2+x_3, y_2+y_3) és (x_3, y_3) pontokra is.

Hátra van még az (x_2, y_2) és az (x_1+x_2, y_1+y_2) pontok távolságának ellenőrzése. A távolság négyzete:

$$(x_2-(x_1+x_2))^2+(y_2-(y_1+y_2))^2=x_1^2+y_1^2=p^2+0^2=p^2$$

Tehát az (x_2, y_2) és az (x_1+x_2, y_1+y_2) pontok távolsága p. Nyilván ugyanez a tükörképeik, tehát az (x_3+x_1, y_3+y_1) és az (x_3, y_3) pontok távolsága is.

Megkaptuk tehát, hogy a hatszögön a (x_2, y_2), (x_1+x_2, y_1+y_2), (x_1, y_1), (x_3+x_1, y_3+y_1), (x_3, y_3), (x_2+x_3, y_2+y_3), (x_2, y_2) sorrend adja az oldalhosszúságok előírt p, q, r, p, q, r sorrendjét.

További érdekességek. A hatszög csúcsainál a csúcsokból kiinduló hatszögoldalak kijelölnek hat darab tompaszögű háromszöget. A szemben fekvők nyilván egymás tükörképei. Számítsuk ki ezen háromszögek területét! Annak a területe például, amelyik az (x_3, y_3) csúcsnál van, éppen $(pq \sin \vartheta)/2 = \sqrt{1-r^2}/2$. Hasonlóképpen a másik kétféle terület $\sqrt{1-p^2}/2$ illetve $\sqrt{1-q^2}/2$. Tehát a hat darab tompaszögű háromszög területének a négyzetösszege:

$$2 \cdot \frac{1-r^2}{4} + 2 \cdot \frac{1-p^2}{4} + 2 \cdot \frac{1-q^2}{4} = \frac{1}{2}$$

Mindazonáltal a hat darab tompaszögű háromszög területének négyzetes közepe egészen pontosan: $1/\sqrt{12}$.

Könnyen meggondolható, hogy a hatszög területe éppen a hat darab háromszög területének az összege. A számtani és a négyzetes közép közötti ismert összefüggés alapján a hatszög területe akkor a legnagyobb, ha $p = q = r = \sqrt{2/3}$.

Ekkor (a maximális helyzeben) tehát a hatszög területe $6/\sqrt{12} = \sqrt{3}$. További érdekes feladat annak kimutatása, hogy a hatszög területe mindig több, mint 1. Ennek bizonyítását az olvasóra hagyjuk. Megemlítjük, hogy nemrégiben Bezdek és Joós egy erősebb állítást is bizonyított [2]: A hatszög a belsejében is tartalmaz egy egységnégyzetet.

Hivatkozások

[1] Hujter M.: *A kocka árnyékáról*, Haladvány Kiadvány 2019-06-05, `http://math.bme.hu/~hujter/190605.pdf`

[2] Bezdek A. és Joós A.: *Általános helyzetű egységkocka síkra való merőleges vetülete a belsejében tartalmaz egységnégyzetet*, szóbeli közlés, 2019 május.