Haladvány Kiadvány 2019-06-18

Szabályos háromszög merőleges vetülete lehet-e tetszőleges derékszögű háromszög?

Hujter Mihály
hujter.misi@gmail.com

Tartalmi összefoglaló: Ebben a dolgozatban igenlő választ adunk Erdély Dániel grafikusművész egy mai kérdésére: *Valamely szabályos háromszög merőleges vetülete lehet-e tetszőleges derékszögű háromszög?*

Tekintsük az xyz-koordinátarendszerben a $(0;0;0)$, $(a;0;z_1)$, $(0;1;z_2)$ pontokat, mint egy háromszög csúcsait. Itt $0 < a \leq 1$. Ennek a háromszögnek a felülnézeti képe (azaz az xy-síkra való merőleges vetülete) egy olyan derékszögű háromszög, melynek befogói a és 1 hosszúságúak. Most bizonyítjuk, hogy az eredeti háromszög egyenlő oldalú, ha a z_1 és z_2 pozitív számokat a függvényében megfelelően választjuk meg.

Legyen $z_1 = \sqrt{z_2^2 + 1 - a^2}$, ahol $z_2 = \sqrt{\frac{2}{3}\left(a^2 - \frac{1}{2} + \sqrt{a^4 - a^2 + 1}\right)}$. Mivel $a^4 - a^2 + 1 = \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, ezért

$$a^2 - \frac{1}{2} + \sqrt{a^4 - a^2 + 1} \geq \sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2} > 0$$

Tehát z_2 és z_1 jól definiáltak és pozitívok.

Tekintsük az oldalak négyzetét:

$$\begin{aligned}(a-0)^2+(0-0)^2+(z_1-0)^2 &= a^2+z_1^2=1+z_2^2\\ (0-0)^2+(1-0)^2+(z_2-0)^2 &= 1+z_2^2\\ (0-a)^2+(1-0)^2+(z_2-z_1)^2 &= 1+z_2^2+a^2+z_1^2-2z_1z_2\end{aligned}$$

Akkor leszünk készen tehát a bizonyítással, ha megmutatjuk, hogy $2z_1z_2=z_1^2+a^2$. Ehhez elegendő azt belátni, hogy $(2z_1z_2)^2-\left(z_1^2+a^2\right)^2+1=1$. Valóban

$$\begin{aligned}&(2z_1z_2)^2-\left(z_1^2+a^2\right)^2+1=4z_1^2z_2^2-\left(z_2^2+1\right)^2+1\\ =\;&4(z_2^2+1-a^2)z_2^2-\left(z_2^2+1\right)^2+1=z_2^2(2-4a^2+3z_2^2)\\ =\;&\frac{2}{3}\left(a^2-\frac{1}{2}+\sqrt{a^4-a^2+1}\right)\left(2-4a^2+2a^2-1+2\sqrt{a^4-a^2+1}\right)=1\end{aligned}$$

Hivatkozás

Erdély Dániel, *Néhány email sok címzettnek*, 2019.06.18.