Végtelen számelméleti gráfok feszített részgráfjairól

dr. Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém,
SZALKAI@ALMOS.UNI-PANNON.HU

2019.12.27.

Kivonat

A természetes számok "*relatív prímek*" relációját vizsgáljuk gráfelméleti eszközökkel.

HALADVANY-KIADVANY, 2019.12.27.
http://www.math.bme.hu/~hujter/halad

1. Definíció. *Tekintsük a következő $K_{\mathbb{N}} = (V, E)$ gráfot: legyen $V := \mathbb{N}$ (természetes számok) és legyen $(m, n) \in E$ ha m és n* relatív prímek *(azaz $lnko(m, n) = 1$).*
□

Az alábbi érdekes állítás könnyen belátható, én Pyber Lászlótól hallottam 1987-ben ([P87]):

2. Állítás. *Tetszőleges G gráf pontosan akkor feszített (spanned, induced) részgráfja $K_{\mathbb{N}}$ -nek, ha*

$$chr(G \setminus \Gamma(P)) \quad \text{véges} \qquad \forall P \in V \tag{*}$$

ahol

$$\Gamma(P) := \{Q \in V : (P, Q) \in E\}$$

jelöli a P csúcs szomszédainak halmazát, chr pedig a kromatikus szám. □

A fenti eredmény adta az ötletet a következő gráfok feszített részgráfjainak vizsgálatához.

3. Definíció. *Tetszőleges (véges vagy végtelen)* $\kappa \geq \lambda$ *számosságokra jelölje* $K_{\kappa,\lambda} := (V_{\kappa,\lambda}, E_{\kappa,\lambda})$ *a következő gráfot:*

$$V_{\kappa,\lambda} := [\kappa]^{\lambda} = \{X \subseteq \kappa : |X| = \lambda\} \tag{1}$$

és legyen

$$(X,Y) \in E \overset{def}{\iff} X \cap Y = \varnothing \ . \tag{2}$$

A $K_{\kappa,<\lambda} := (V_{\kappa,<\lambda}, E_{\kappa,<\lambda})$ *és* $K_{\kappa,\leq\lambda} := (V_{\kappa,\leq\lambda}, E_{\kappa,\leq\lambda})$ *gráfokat hasonlóan definiáljuk:*

$$V_{\kappa,<\lambda} := [\kappa]^{<\lambda} = \{X \subseteq \kappa : |X| < \lambda\} \tag{3}$$

illetve

$$V_{\kappa,\leq\lambda} := [\kappa]^{\leq\lambda} = \{X \subseteq \kappa : |X| \leq \lambda\} \ , \tag{4}$$

és az éleket (2) definiálja. $\square$

Az 1987-ben felvetett ([Sz87]) alábbi probléma tudomásom szerint máig megoldatlan:

4. Probléma. *Jellemezzük a* $K_{\kappa,\lambda}$*,* $K_{\kappa,\leq\lambda}$ *és* $K_{\kappa,<\lambda}$ *gráfok feszített részgráfjait.* $\square$

A következő állítások még egyszerűen beláthatók:

5. Állítás. Bármely κ *számosságra egy tetszőleges megszámlálható* G *gráf pontosan akkor feszített részgráfja* $K_{\kappa,<\omega_0}$ *-nak, ha* (*) *teljesül.* $\square$

(A $K_{\kappa,<\omega_0}$ gráf csúcspontjai, azaz $V_{\kappa,<\omega_0}$ elemei a κ számosság *véges* részhalmazai.)

6. Állítás. Bármely κ *számosság esetén egy tetszőleges, legfeljebb* λ *méretű (csúcsszámú)* G *gráf pontosan akkor feszített részgráfja* $K_{\kappa,<\lambda}$ *-nak, ha*

$$chr(G \backslash \Gamma(P)) < \lambda \qquad \textit{bármely } P \in V \tag{*L}$$

teljesül. $\square$

Azonban λ -nál nagyobb számosságú gráfokra a fenti feltétel nem elégséges, mint Komjáth Péter észrevette ([K87]):

7. Állítás. *A λ^+ csúcsú páros gráf nem feszített részgráfja $K_{\kappa,<\lambda}$ -nak.* $\square$

A következő tételben *szükséges* feltételeket fogalmazunk meg a $K_{\kappa,<\lambda}$ gráfok feszített részgráfjairól.

8. Tétel. *Ha feltesszük még, hogy λ* ***elérhetetlen számosság****, vagyis*

$$\lambda^{<\lambda} := \sum_{\mu<\lambda} \lambda^{\mu} = \lambda \tag{5}$$

és a G gráfban minden csúcs szomszédhalmazai különbözőek:

$$P_1 \neq P_2 \implies \Gamma(P_1) \neq \Gamma(P_2) \qquad \forall P_1, P_2 \in V(G) \ , \tag{6}$$

akkor a λ^+ -nál nagyobb *méretű G gráfokra a következő feltételek* szükséges *ahhoz, hogy G feszített részgráfja lehessen $K_{\kappa,<\lambda}$ -nak:*

$$\overline{G} \text{ -ben nincs teljes } \left[\lambda : \lambda^+\right] \text{ páros gráf} \tag{**}$$

és G páros, azaz $V(G) = A \cup B$ esetén

$$\text{van } A \text{ -nak egy } \left\{X_i \in [A]^{\lambda^+} : i \in I\right\} \text{ majdnem diszjunkt felosztása,} \tag{***}$$

vagyis

$$|X_i \cap X_j| < \lambda \qquad \forall i \neq j \in I \ , \tag{7}$$

amelyre

$$(\forall y \in B) \ (\exists \vartheta_y < \lambda) \ (\forall i \in I) \quad \text{vagy} \quad \Gamma(y) \cap X_i = \varnothing \quad \text{vagy} \quad |X_i \setminus \Gamma(y)| \leq \vartheta_y \ . \tag{8}$$

$\square$

Sajnos máig nem ismert (általános) *elégséges* feltétel λ^+ -nál nagyobb méretű G gráfokra ahhoz, hogy G feszített részgráfja lehessen a $K_{\kappa,<\lambda}$, $K_{\kappa,\leq\lambda}$, $K_{\kappa,\lambda}$ gráfok valamelyikének, még a $|G| = \lambda^+$ vagy $chr(G) = 2$ speciális esetekben sem.

Erdős Pál, David Wagner és Pyber László [EPW85] a problémát megszámlálható hipergráfokra vizsgálták.

Wilson Castrellon a következő problémát vetette fel ([CW87]): jellemezzük az alábbi $K_{\mathbb{R}}$ gráf feszített részgráfjait:

9. Definíció. *Tekintsük a* $K_{\mathbb{R}} = (V, E)$ *gráfot: legyen* $V := \mathbb{R}$ *(valós számok) és legyen* $(r, s) \in E$ *ha* r/s irracionális. $\square$

Egyedül a következő részeredmény ismert:

10. Állítás. *Egy véges vagy megszámlálható* G *gráf* pontosan akkor *feszített részgráfja* $K_{\mathbb{R}}$ *-nek, ha bármely* $p, q, r \in V$ *csúcsokra*

$$\textit{HA} \ \ (p,q) \in E \quad \textit{AKKOR} \quad (p,r) \in E \ \textit{vagy} \ (q,r) \in E \ . \tag{+}$$

$\square$

Wilson Castrellon, Samuel Camargo és Fred Galvin neve alatt találjuk a következő problémát ([CCG87]):

11. Probléma. *Mutassuk meg, hogy* $\forall \lambda \exists \kappa \geq \lambda \ \exists |A| = \kappa \ \exists F \subset A \ , \ |F| = 2^{\kappa}$ *amelyre* $X \cap Y$ *véges bármely* $X, Y \in F \ , \ X \neq Y$ *esetén.*

Hivatkozások

[CW87] **Castrellon,W.:** *személyes közlés*, 1987.

[CCG87] **Castrellon,W., Camargo,S., Galvin,F.:** *Problem* 6569, American Mathematical Monthly 1987, vol. 97, No. 2 (1990), p.166.

[EPW85] **Erdős,P., Pyber,L., Wagner,D.:** *Representing hypergraphs by Coprimality*, kézirat, 1985.

[K87] **Komjáth Péter:** *személyes közlés*, 1987.

[P87] **Pyber László:** *személyes közlés*, 1987.

[Sz87] **Szalkai,I.:** *Problem*, in: Colloquia Math. Soc. J. Bolyai, vol 52, p.585., Conference on Combinatorics, Eger, Hungary, 1987.

[Sz91] **Szalkai,I.:** *An Open Problem Concerning Spanned Subgraphs of Infinite Graphs*, Preprint of Dept. Math. Univ. Veszprém, 1991.