Rugalmas pénzérmék és algebrai számok

dr. Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém,
szalkai@almos.uni-pannon.hu

2019.12.28.

Haladvany-Kiadvany, 2019.12.28.
http://math.bme.hu/~hujter/191228.pdf ,
http://www.math.bme.hu/~hujter/halad

1. Bevezetés

Ha feldobunk *kétszer* egy olyan pénzérmét, ami $p_3 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$ valószínűséggel fej és $1 - p_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ valószínűséggel írás, akkor annak az esélye[1)], azaz valószínűsége, hogy egy írást és egy fejet dobtunk:

$$P_{\circ\bullet,\bullet\circ} = 2p_3\,(1 - p_3) = 2 \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{3}\ , \tag{1}$$

míg háromszor feldobva ugyanezt az érmét, annak a valószínűsége, hogy három írást vagy három fejet dobunk:

$$P_{\circ\circ\circ,\bullet\bullet\bullet} = p_3^3 + (1 - p_3)^3 = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)^3 + \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^3 = \frac{1}{2}\ . \tag{2}$$

Úgy is fogalmazhatunk, hogy a fenti egyetlen pénzérmével *szimulálhatjuk* mind a szabályos $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$, mind az $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$ valószínűségű fej-írás pénzérméket!

[1)] A matematikai irodalomban az "esély" szót általában a "valószínűség" szinonímájaként használják, azonban az orvosi statisztikában az **esély** szóval a $\frac{p}{1-p}$ hányadost jelölik, ezért mi a továbbiakban tartózkodunk az "esély" szó használatától.

1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a p valószínűség* ***szimulálja*** *az r valószínűséget, jelben* $p \rightsquigarrow r$, *ha van olyan $n \in \mathbb{N}$ és E részhalmaza a dobássorozatoknak, hogy a p érmével ezt r valószínűséggel tudjuk teljesíteni:*

$$P(E) = r \ . \tag{3}$$

Másképpen: *$p \rightsquigarrow r$ ha vannak olyan $n \in \mathbb{N}$ és $a_0, ..., a_n$ természetes számok, amelyekre*

$$0 \le a_i \le \tbinom{n}{i} \qquad (i = 0, 1, ..., n) \tag{4}$$

és

$$\sum_{i=0}^{n} a_i p^i (1-p)^{n-i} = r \ . \tag{5}$$

□

A fenti példában tehát $\frac{3+\sqrt{3}}{6} \rightsquigarrow \frac{1}{2}$ és $\frac{3+\sqrt{3}}{6} \rightsquigarrow \frac{1}{3}$. Sőt, nem csak kettő, hanem egyszerre akár véges sok, majdnem tetszőleges pénzérmét is biztosan tudunk szimulálni egyetlen, alkalmas érmével. Például, ha p szimulálja r és s -et, akkor szimulálja

$$r@_p s := pr + (1-p)s \tag{6}$$

-et is, képletben: $p \rightsquigarrow r$ és $p \rightsquigarrow s$ esetén $p \rightsquigarrow r@_p s$, és nyilván bármelyik p -re $p \rightsquigarrow 0$ és $p \rightsquigarrow 1$.

2. Tétel. *A racionális valószínűségek bármely* véges $F \subset \mathbb{Q} \cap [0,1]$ *részhalmazához található olyan p valószínűség, amely (egyedül) szimulálja F minden elemét.*

Bizonyítás. Legyen F elemeinek nevezőinek maximuma N , és $N > 4$, és legyen $n := N!/3$, majd vegyük az

$$np(1-p)^{n-1} = \frac{1}{3} \tag{7}$$

egyenlet egyik, $(0,1)$ intervallumba eső p gyökét[2)]. Mivel erre a p valószínűségre

$$a \cdot p(1-p)^{n-1} = \frac{a}{3n} = \frac{a}{N!} \tag{8}$$

minden $0 \le a \le n$ esetén, ezután már kiszámolható, hogy p szimulálja az összes, $N!$ nevezőjű, 0 és 1 közötti törtet, többek között tehát F elemeit is (a részletek [SzV 95] és [VSz 93] -ben is megtalálhatóak). ■

[2)] Belátható, hogy az $np(1-p)^{n-1} = z$ egyenleteknek minden $z > \frac{1}{e}$ és $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esetén van $p \in (0,1)$ gyöke.

A (7) egyenlet megoldása általában nem egyszerű. Ha például az

$$F_5 = \left\{ \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, ..., \frac{9}{10} \right\} \tag{9}$$

halmaz elemeit szeretnénk egyszerre szimulálni, akkor az

$$1209600 \cdot p \cdot (1-p)^{1209600-1} = \frac{1}{3} \tag{10}$$

egyenletet kellene megoldanunk, ami még géppel sem egyszerű.

2. Próbálkozások

A bevezetőben említett p_3 valószínűséghez hasonlóan néhány speciális esetet vizsgálunk meg.

n=5

Eláruljuk, hogy a

$$p_5 = \frac{5 + \sqrt{10 \cdot \sqrt{15} - 25}}{10} \approx 0.870\,538 \tag{11}$$

szám egyszerre szimulálja (9) mindegyik elemét: $n = 5$ esetén az (5) összegben az a_i együtthatók a következőek:

r	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1/10	0	1	2	2	1	0
2/10	0	2	4	4	2	0
3/10	0	3	6	6	3	0
4/10	0	4	8	8	4	0
5/10	0	5	10	10	5	0
1/2	1	0	0	0	0	1
6/10	1	1	2	2	1	1
7/10	1	2	4	4	2	1
8/10	1	3	6	6	3	1
9/10	1	4	8	8	4	1

,

például $r = 3/10$ esetén:

$$\mathbf{0}\cdot\left(\frac{5+\sqrt{10\cdot\sqrt{15}-25}}{10}\right)^0\left(1-\frac{5+\sqrt{10\cdot\sqrt{15}-25}}{10}\right)^5+\mathbf{3}\cdot\left(\frac{5+\sqrt{10\cdot\sqrt{15}-25}}{10}\right)^1\left(1-\frac{5+\sqrt{10\cdot\sqrt{15}-25}}{10}\right)^4$$
$$+\mathbf{6}\cdot\left(\frac{5+\sqrt{10\cdot\sqrt{15}-25}}{10}\right)^2\left(1-\frac{5+\sqrt{10\cdot\sqrt{15}-25}}{10}\right)^3+\mathbf{6}\cdot\left(\frac{5+\sqrt{10\cdot\sqrt{15}-25}}{10}\right)^3\left(1-\frac{5+\sqrt{10\cdot\sqrt{15}-25}}{10}\right)^2$$
$$+\mathbf{3}\cdot\left(\frac{5+\sqrt{10\cdot\sqrt{15}-25}}{10}\right)^4\left(1-\frac{5+\sqrt{10\cdot\sqrt{15}-25}}{10}\right)^1+\mathbf{0}\cdot\left(\frac{5+\sqrt{10\cdot\sqrt{15}-25}}{10}\right)^5\left(1-\frac{5+\sqrt{10\cdot\sqrt{15}-25}}{10}\right)^0$$
$$=\frac{3}{10}\,.$$

Az 5/10 és 1/2 sorok egymás alatt külön szerepelnek, de ez nem tévedés. A fenti együttható sorozatokat vizsgálva, a binomiális együtthatók ismeretében, felsejlik egy módszer, és a $p^5+(1-p)^5=\frac{1}{2}$ egyenlet jelentősége. Ezt az ötletet megpróbáljuk a következő alfejezetben $n = 5$ helyett $n = 7$ -re megismételni, az utána következő alfejezetben pedig általában is megfogalmazzuk ezt a módszert, ami sajnos csak speciális $n \in \mathbb{N}$ számokra és $F \subset \mathbb{Q}$ halmazokra működik.

n=7

Előrebocsájtjuk, hogy ebben az alfejezetben a (15) képletben szereplő törtekre kapunk közös szimuláló p_7 valószínűséget.

Tekintsük a

$$p^7+(1-p)^7=\frac{1}{2} \tag{12}$$

egyenletet. Ennek biztosan van megoldása 0 és 1 között, mert bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ kitevőre a $p^\alpha + (1-p)^\alpha$ kifejezés minimuma $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha$. Jelöljük ezt a gyököt p_7 -tel.

A Binomiális tétel szerint $\sum_{j=1}^{6} \binom{7}{j} \cdot p_7^j (1-p_7)^{7-j} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Mivel $n = 7$ prímszám, ezért minden $1 \le j \le 6$ esetén $\binom{7}{j}$ osztható 7 -tel, vagyis a

$$\sum_{j=1}^{6} \frac{\binom{7}{j}}{7} \cdot p_7^j (1-p_7)^{7-j} = \frac{1}{2 \cdot 7} \tag{13}$$

és $0 \le i \le 7$ esetén a

$$\sum_{j=1}^{6} i \frac{\binom{7}{j}}{7} \cdot p_7^j (1-p_7)^{7-j} = \frac{i}{2 \cdot 7} \tag{14}$$

összefüggések alapján p_7 szimulálja az

$$F_7 := \left\{ \frac{i}{14} : 0 \le i \le 14 \right\} \tag{15}$$

halmaz $\frac{1}{2}$ -nél nem nagyobb elemeit. A fenti (12) és (14) egyenletek alapján pedig

$$p^7 + \sum_{j=1}^{6} i \frac{\binom{7}{j}}{7} \cdot p_7^j (1-p_7)^{7-j} + (1-p)^7 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2 \cdot 7} , \tag{16}$$

vagyis p_7 szimulálja a (15) halmaz $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb elemeit is.

Már csak a (12) egyenletet kell megoldanunk:

$$p^7 + (1-p)^7 = 7p^6 - 21p^5 + 35p^4 - 35p^3 + 21p^2 - 7p + 1 = \frac{1}{2} \tag{17}$$

egy általános hatodfokú egyenlet, de egy szokásos trükkel a fokszám csökkenthető. Legyen $p = \frac{1}{2} + r$, ekkor

$$p^7 + (1-p)^7 = \left(\frac{1}{2} + r\right)^7 + \left(\frac{1}{2} - r\right)^7 = 7r^6 + \frac{35}{4}r^4 + \frac{21}{16}r^2 + \frac{1}{64} = \frac{1}{2} , \tag{18}$$

az $s = r^2$ helyettesítéssel

$$7s^3 + \frac{35}{4}s^2 + \frac{21}{16}s + \frac{1}{64} = \frac{1}{2} , \tag{19}$$

aminek egyik gyöke

$$s_1 = \frac{1}{9\sqrt[3]{z}} + \sqrt[3]{z} - \frac{5}{12} \approx 0.164\,611\,6778 \tag{20}$$

ahol $\quad z = \frac{1}{756} + \sqrt{\frac{29}{21168}}i$, $\quad$ tehát $\quad r = \sqrt{s} \approx 0.405\,723\,647\,080\,128 \quad$ és

$$p_7 = \frac{1}{2} + r \approx 0.905\,723\,647\,080\,128\ . \tag{21}$$

Pontosabban

$$p_7 \ = \ \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{9\sqrt[3]{z}} + \sqrt[3]{z} - \frac{5}{12}} \quad \text{ahol } z = \frac{1}{756} + \sqrt{\frac{29}{21168}} \cdot i\ . \tag{22}$$

Tehát, a (14) képlet szerint, $0 \le i \le 7$ esetén az $\frac{i}{2\cdot 7}$ tört szimulálását a $[0, i, 3i, 5i, 5i, 3i, i, 0]$ együttható sorozat igazolja, vagyis

$$i \cdot p_7^6 \cdot (1-p_7)^1 + 3i \cdot p_7^5\,(1-p_7)^2 + 5i \cdot p_7^4 \cdot (1-p_7)^3 + 5i \cdot p_7^3 \cdot (1-p_7)^4$$
$$+3i \cdot p_7^2 \cdot (1-p_7)^5 + i \cdot p_7^1 \cdot (1-p_7)^6 = \frac{i}{2\cdot 7}\ ,$$

(tessék kipróbálni), míg $i = 8, ..., 14$ esetén, az $i = 7 + i^-$ jelöléssel az $[1, i^-, 3i^-, 5i^-, 5i^-, 3i^-, i^-, 1]$ együttható sorozat szimulálja az $\frac{i}{2\cdot 7}$ törteket.

Általában

Nézzük meg a fenti módszer általánosítását, és korlátait.

3. Állítás. *Ha n tetszőleges rögzített szám, $n \ge 2$, és*

$$k_n := lnko \left\{ \binom{n}{i} : 1 \le i \le n-1 \right\}\ , \tag{23}$$

akkor található egy olyan p_n valószínűség, amely szimulálja az

$$F = \left\{ \frac{i}{2k_n} : 0 \le i \le n \right\} \tag{24}$$

halmaz összes elemét.

Például, ha n prím, akkor $n \mid \binom{n}{i}$ minden $i = 1, ..., n-1$ esetén, tehát $k_n = n$, vagyis ekkor p_n.szimulálja az összes $2n$ nevezőjű törtet.

Bizonyítás. Jelölje p_n az

$$p^n + (1-p)^n = \frac{1}{2} \tag{25}$$

egyenlet egyik gyökét, ekkor $i = 0, 1, ..., k_n$ esetén az

$$a_j = i \cdot \frac{\binom{n}{j}}{k_n} \qquad (1 \le j \le n-1), \quad a_0 = a_n = 0 \tag{26}$$

együtthatók igazolják a $\frac{i}{2k_n}$ törtek szimulálását, míg $k_n \le i \le 2k_n$ esetén az $\frac{i}{2k_n}$ törteket az

$$a_j = i^- \cdot \frac{\binom{n}{j}}{k_n} \qquad (1 \le j \le n-1), \quad a_0 = a_n = 1 \tag{27}$$

együtthatók szimulálják, ahol $i^- = i - k_n$. ■

3. Megoldatlan kérdések

[SzV 95] és [VSz 93] -ben sok összefüggés és megjegyzés található a szimuláció relációról, részletesen leírjuk a $p \in (0,1)$ valószínűségek által szimulált S_p halmaz *racionális* elemeinek halmazát, azaz a $S_p \cap \mathbb{Q}$ halmazt, de megoldatlan kérdés is jócskán maradt, melyek már lassan 25 éve megoldatlanok.

Megoldatlan: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *és* $\frac{1}{\sqrt{3}}$ *szimulálhatók-e egyetlen* p *valószínűséggel*?

Vegyük észre ugyanis, hogy ha r *algebrai szám* és $p \rightsquigarrow r$, akkor az (5), azaz a

$$\sum_{i=0}^{n} a_i p^i (1-p)^{n-i} = r \tag{28}$$

összefüggés alapján p is szükségképpen algebrai, és megfordítva is: ha p algebrai akkor (28) esetén r is algebrai. (Az algebrai számok fogalma eléggé közismert, megtalálható például [m A], [w A hu], [w A en] és [SzV 19]-ben.) Tehát például $\frac{1}{e}$ és $\frac{1}{\sqrt{2}}$, sőt $\frac{1}{e}$ és $\frac{1}{\pi}$ sem szimulálhatók egyszerre.

Általánosíthatjuk is a szimulálás relációt, a (4) feltétel gyengítésével, talán általánosítva könnyebben jutunk újabb eredményekhez:

4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $p \in \mathbb{R}$ *valós szám* ***általánosabb értelemben szimulálja*** *az* $r \in \mathbb{R}$ *valós számot, jelben* $p \approx> r$ *, ha vannak olyan* $n \in \mathbb{N}$ *és* $a_0, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ akármilyen *egész számok, amelyekre*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i p^i = r \ , \tag{29}$$

és jelölje $\mathbb{S}_p$ *a* p *által általánosan szimulált számok halmazát:*

$$\mathbb{S}_p := \{r \in \mathbb{R} : p \approx> r\} \ . \tag{30}$$

□

Reméljük, hogy a folyamatban levő kutatásaink eredményeiről hamarosan beszámolhatunk a Tisztelt Olvasóknak.

4. Irodalom

[LL 1986] **László Lovász:** *An Algorithmic Theory of Numbers*, SIAM 1986.

[m A] **Weisstein, Eric W:** *Algebraic Number*, From MathWorld - A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/AlgebraicNumber.html

[SzV 95] **Szalkai I., Velleman,D.:** *Rugalmas pénzérmék*, Matematikai Lapok, 1992-1995, 23-38.

[SzV 19] **Szalkai I.:** *Számológéppel gyökök ellen*, Haladvány Kiadvány, 2019.12.28, http://math.bme.hu/~hujter/191230.pdf , http://www.math.bme.hu/~hujter/halad

[VSz 93] **Velleman,D., Szalkai I.:** *Versatile coins*, American Mathematical Monthly, Vol. 100, (1993), pp. 26-33.

[w A hu] **Wikipédia:** *Algebrai szám*, https://hu.wikipedia.org/wiki/Algebrai_szám

[w A en] **Wikipedia:** *Algebraic number*, https://en.wikipedia.org/wiki/Algebraic_number