

# Többdimenziós logarlécek

dr. Szalkai István  
Pannon Egyetem, Veszprém,  
SZALKAI@ALMOS.UNI-PANNON.HU

2019.12.29.

## Kivonat

A hagyományos logarlécek csak 1 dimenzióban (jobbra-balra) mozgathatók. Ha pedig kettő vagy több irányban is mozoghatnak (mint pl. egy darab átlátszó papír vagy műanyag fólia), akkor sokkal bonyolultabb számításokra is képesek lesznek.

HALADVANY-KIADVANY, 2019.12.29.  
<http://www.math.bme.hu/~hujter/halad>

## 1. Ötlet, jelölések és általában

Az *egydimenziós* számoló ("logar-") lécek általános alapelve a következő ([Sz1]-[Sz3], [WL]). Az " $x$ " számokat ( $x \in \mathbb{R}$ ) a három egymás melletti (párhuzamos) lécre  $d_x^{(i)} = f_i(x)$  **távolságra írjuk** az  $S_i$  startpontjaiktól ( $i = 1, 2, 3$ ), ahol  $f_i(x)$  megfelelő szigorúan monoton függvények, majd az így skálázott léceket egymás mellett eltolva, a (valódi geometriai)

$$d_z^{(3)} = d_x^{(1)} + d_y^{(2)} \quad (1)$$

távolságra levő pontban a harmadik skálán a " $z$ " számot olvashatjuk le. Vagyis az  $x, y$  számokat "input"-ként megadva, három skálát használva máris megkapjuk  $z$  értékét az

$$f_3(z) = f_1(x) + f_2(y) \quad (2)$$

vagyis a

$$z = f_3^{-1}(f_1(x) + f_2(y)) \quad (3)$$

összefüggés alapján. (A "logarlécek" témában kezdő Olvasónak javasoljuk [WL] -ben a két műanyag vonalzó fényképének és az alatta levő, logaritmikus skálák (függvények) ábrájának tanulmányozását.)

Természetesen az  $f_1, f_2, f_3$  függvényeknek szigorúan monotonoknak kell lenniük. A skálák  $S_i$  startpontjai nyilván a  $d_S^{(i)} = 0$  távolságot jelentik a skála kezdőpontjától, azonban "s" felirata néha kicsit bonyolult: az  $f("s") = 0$  egyenletet kell kielégítenie.

Például, a "hagyományos" *logarléceknél*  $i = 1, 2, 3$  esetén  $f_i = \log$  és " $s$ " = 1, a *négyzetes* skáláknál  $f_i(x) = x^2$  és " $s$ " = 0, míg a *reciprok* skáláknál  $f_i(x) = \frac{1}{x}$  és " $s$ " =  $\infty$  ([Sz1]-[Sz3]), amelyek (2) és (3) szerint az alábbi összefüggéseket számolják ki:

$$\log(z) = \log(x) + \log(y), \quad z^2 = x^2 + y^2, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad (4)$$

azaz

$$z = x \cdot y, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = \frac{xy}{x + y}. \quad (5)$$

Részletes (nyomtatható) négyzetes és reciprok skálákat az [Sz2], [Sz3], [WL] cikkek végein találunk.

Most lépünk ki (elsőként csak) a síkba. Egyelőre csak kétdimenziós *derékszögű*, később polárkoordinátarendszerekkel foglalkozunk.

**Ötlet:** az  $x$  és  $y$  tengelyekre a fenti módon írjuk a "koordinátákat", legyen ez a kezdeti koordinátarendszerünk  $\mathcal{A}$  (fix), vagyis ebben a koordinátarendszerben a (" $x$ ", " $y$ ") feliratú  $P$  pont valójában, geometriailag a  $P(d_x, d_y)$  helyen található, az  $\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(0, 0)$  kezdőponthoz viszonyítva, ahol  $d_x = f_1("x")$ ,  $d_y = f_2("y")$ , és az  $\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(0, 0)$  kezdőpont felirata (" $x_0$ ", " $y_0$ "), amelyre  $f_1("x_0") = 0$  és  $f_2("y_0") = 0$ <sup>1)</sup>.

Ha most erre a  $P$  pontra helyezük egy másik  $\mathcal{B}$  (természetesen átlátszó papír vagy fólia) koordinátarendszer  $\mathbf{S}_{\mathcal{B}}$  kezdőpontját, annak (" $u$ ", " $v$ ") "feliratú"  $Q$  pontja,  $\mathbf{S}_{\mathcal{B}}$ -hez viszonyítva valójában a  $Q(d_u, d_v)$  helyen, az  $\mathbf{S}_{\mathcal{A}}$  kezdőponthoz viszonyítva pedig a

$$(d_x + d_u, d_y + d_v) \quad (6)$$

helyen található, és  $d_u = f_3("u")$ ,  $d_v = f_4("v")$ .

Ha most, vagy inkább a szerkesztés előtt, az  $\mathcal{A}$  koordinátarendszer *minden*,  $(d_1, d_2)$  *valódi* koordinátájú pontjához az  $F(d_1, d_2)$  valós számot írtuk, akkor a fenti

<sup>1)</sup> Néhány esetben ilyen (" $x_0$ ", " $y_0$ ") pont nincs, részletesebben lásd az [Sz3] cikk 3. fejezetében.

algoritmussal az "x", "y", "u", "v" számokból a  $Q$  pontban máris megszerkesztettük azaz leolvashatjuk ("kiszámoltuk") a

$$z = F(d_x + d_u, d_y + d_v) \quad (7)$$

értéket. Ez pedig a (3) összefüggés (egyik) többváltozós általánosítása.

Ha bevezetjük a  $d_x = f_1(x)$ ,  $d_y = f_2(y)$ ,  $d_u = f_3(u)$ ,  $d_v = f_4(v)$  jelöléseket, akkor (7) ekvivalens a

$$\boxed{z = F(f_1(x) + f_3(u), f_2(y) + f_4(v))} \quad (8)$$

képlettel.

A módszert a következő fejezet 3-5. ábráin szemlélhetjük.

Az  $\mathcal{A}$  koordinátarendszerben elegendő csak a tengelyekre írni a skálákat, "berácsolni" nem kell, hiszen  $\mathcal{B}$  is derékszögű, és annak a tengelyei "kimetszik"  $\mathcal{A}$  tengelyein "x" és "y" értékeit, mint ezt az 1-3. ábrákon láthatjuk.

A koordinátarendszerek pontos (párhuzamos) egymásra helyezése technikailag megoldható például a mérnöki rajzasztalok mozgatható vonalzója segítségével (hasonlít az "egyszerű" festőállványhoz: [WD]).

A különböző skálák előállításáról és alakjairól [HM], [Sz3], [Sz4], [WL] -ben, a koordinátarendszerek egyéb felhasználásairól [Sz1], [Sz2], [Sz5], [Sz6] -ban olvashatunk.

## 2. Skaláris szorzat

Most  $i = 1, 2, 3, 4$  esetén  $f_i(x) = \log(x)$  és<sup>2)</sup>

$$F(d_1, d_2) = e^{d_1} + e^{d_2}, \quad (9)$$

így (8) most a

$$z = x \cdot u + y \cdot v \quad (10)$$

alakot ölti, ami a jól ismert *skaláris szorzat*.

Megjegyezzük, hogy a  $\mathcal{B}$  (azaz *log-log*) koordinátarendszerben (9), a "feliratok" alapján az

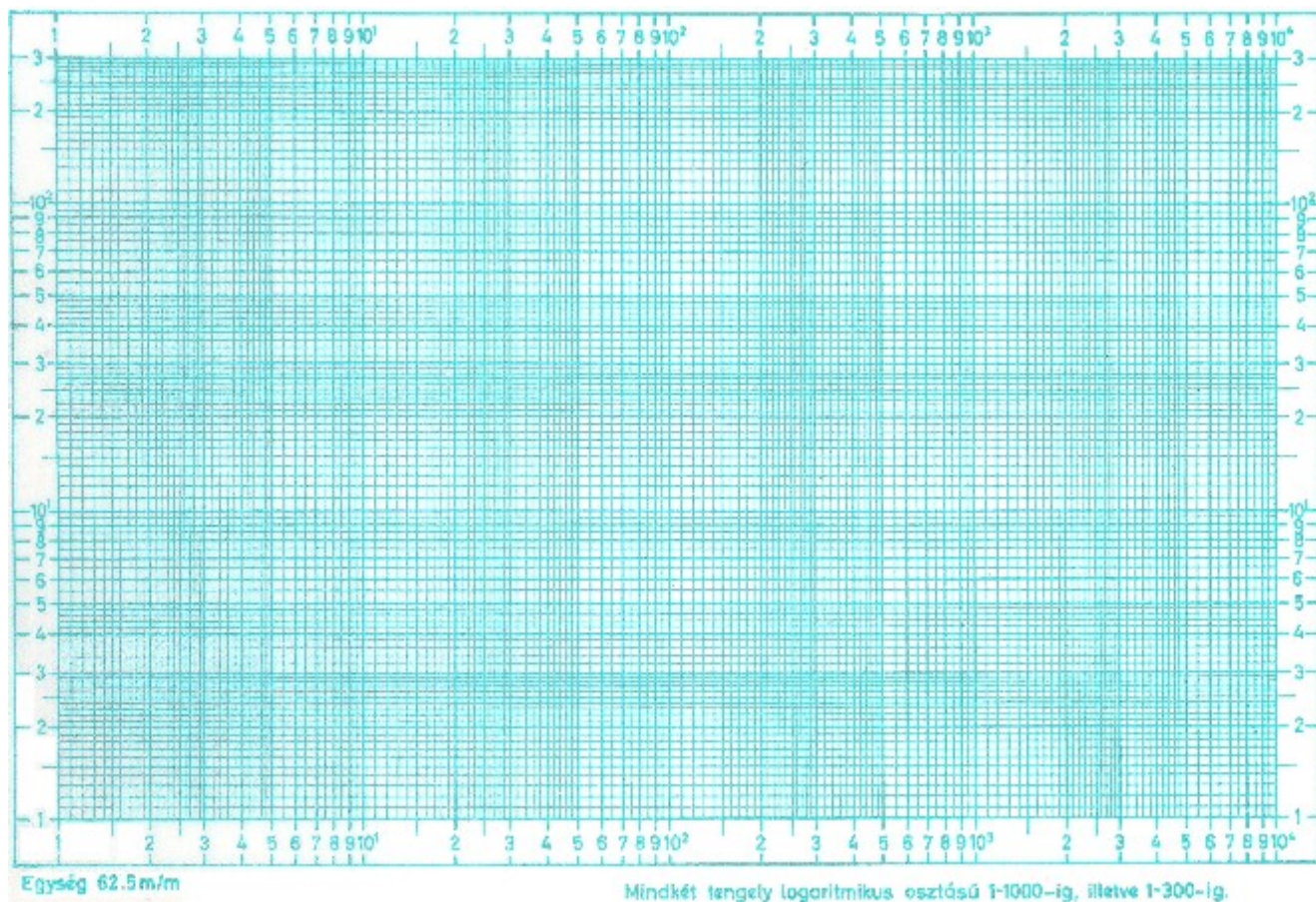
$$F("x_1", "x_2") = "x_1" + "x_2" \quad (11)$$

---

<sup>2)</sup> bármilyen alapú logaritmus megfelel.

alakot ölti (mert  $d_1 = \log(x_1)$  és  $d_2 = \log(x_2)$ ).

Esetünkben az  $\mathcal{A}$  és  $\mathcal{B}$  koordinátarendszerek alap skálái logaritmikusak, amit néha még ma is lehet kapni a papírboltban "logaritmuspapír" néven:



1. **Ábra:** *A logaritmusos papír*

Nagyobb felbontású képet találunk [Sz5] 4. oldalán, a <http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/koordinata/loglog-uj-f.jpg> linken és a papírboltokban.

A számolás menete az alábbi 2-5. ábrákon követhető.

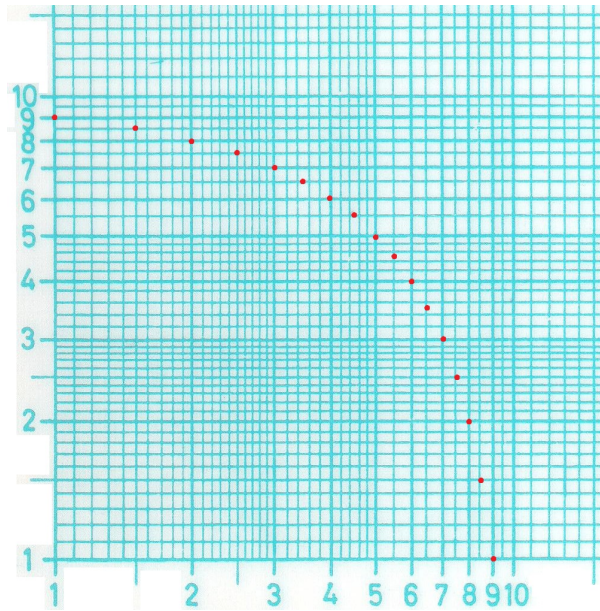
o) A log-log papírra felrajzoljuk az  $x + y = c$  szintvonalakat, több különböző  $c$  értékre.

i) Az **A** ("log-log") koordináta-rendszer van alul, **S(1,1)** a startpont,  $\mathbf{u} \approx (3.3, 1.5)$ , rácsozat nem szükséges, elég csak  $\mathbf{u}$  koordinátáit a tengelyeken megjelölni/megjegyezni, az  $\mathbf{u}$  pontot magát az **A** síkon nem kell megjelölni, a **fekete** szintvonalakra most még nincs szükség.

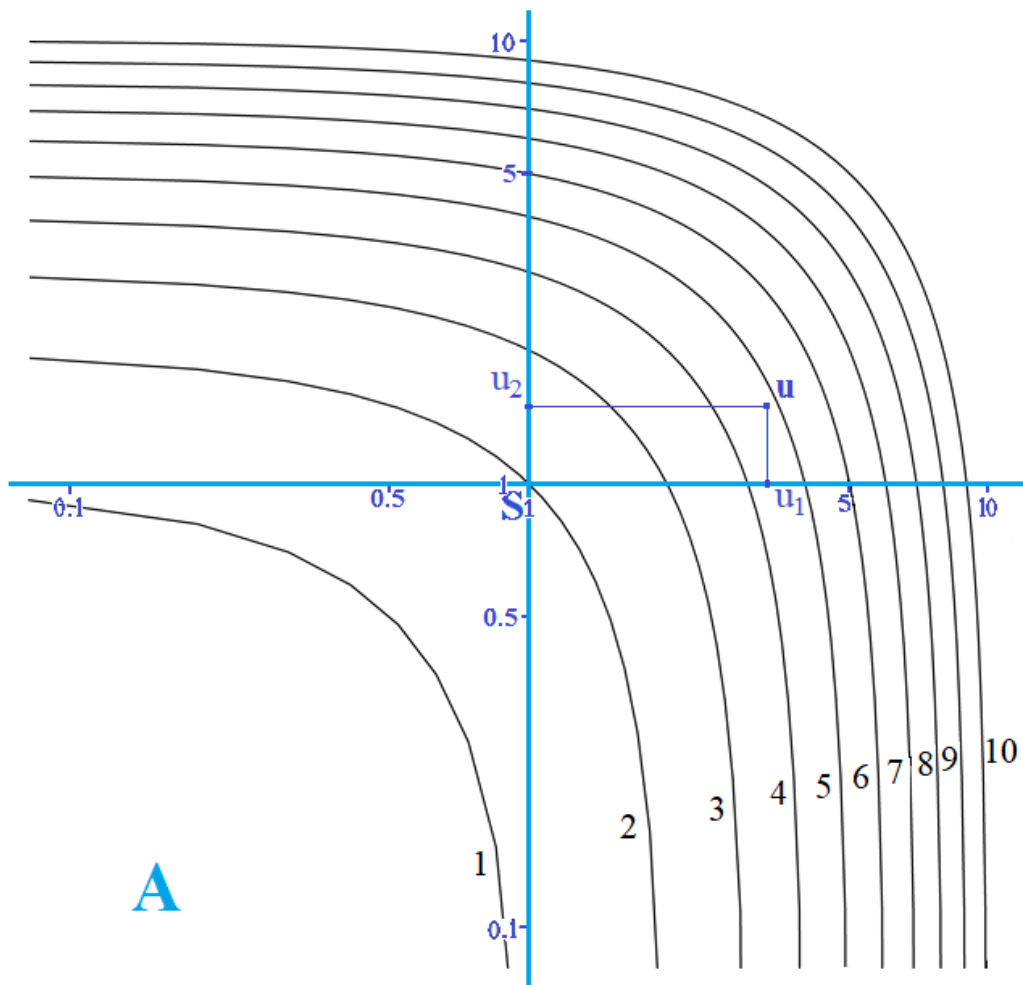
ii) Az *átlátszó* **B** ("log-log") koordináta-rendszer **S(1,1)** startpontját az  $\mathbf{u}$  pontra kell helyezni, de mivel csak az  $u_1$  és  $u_2$  koordinátákat jelöltük/jegyeztük meg a **kék** koordinátatengelyeken, ezért a **B** koordináta-rendszer tengelyeit illesszük ezekre a koordinátákra,

iii) A  $\mathbf{v}$  pont koordinátái a **B** rendszerben  $\mathbf{v} \approx (1.6, 2.4)$ , de az **A** rendszerben már  $w_1 = u_1 v_1 \approx 3.3 \cdot 1.6 \approx 5.28$  és  $w_2 = u_2 v_2 \approx 1.5 \cdot 2.4 \approx 3.6$ .

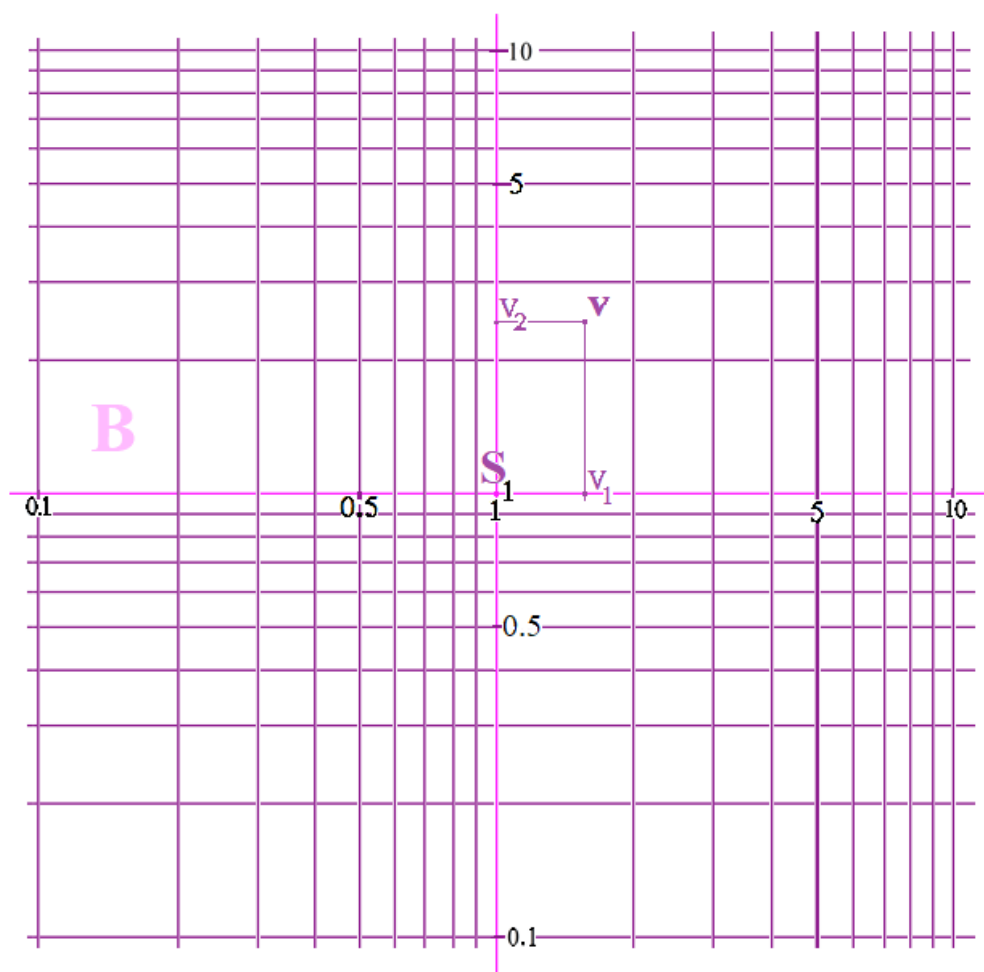
iv) Mivel az **A** rendszerben a **fekete** szintvonalak a  $w_1 + w_2 = c$  (konstans) koordinátájú pontokat jelölik, így a szintvonalakra írt szám azonnal megadja  $w_1 + w_2$  azaz  $u_1 v_1 + u_2 v_2 \approx 8.88$  értékét!



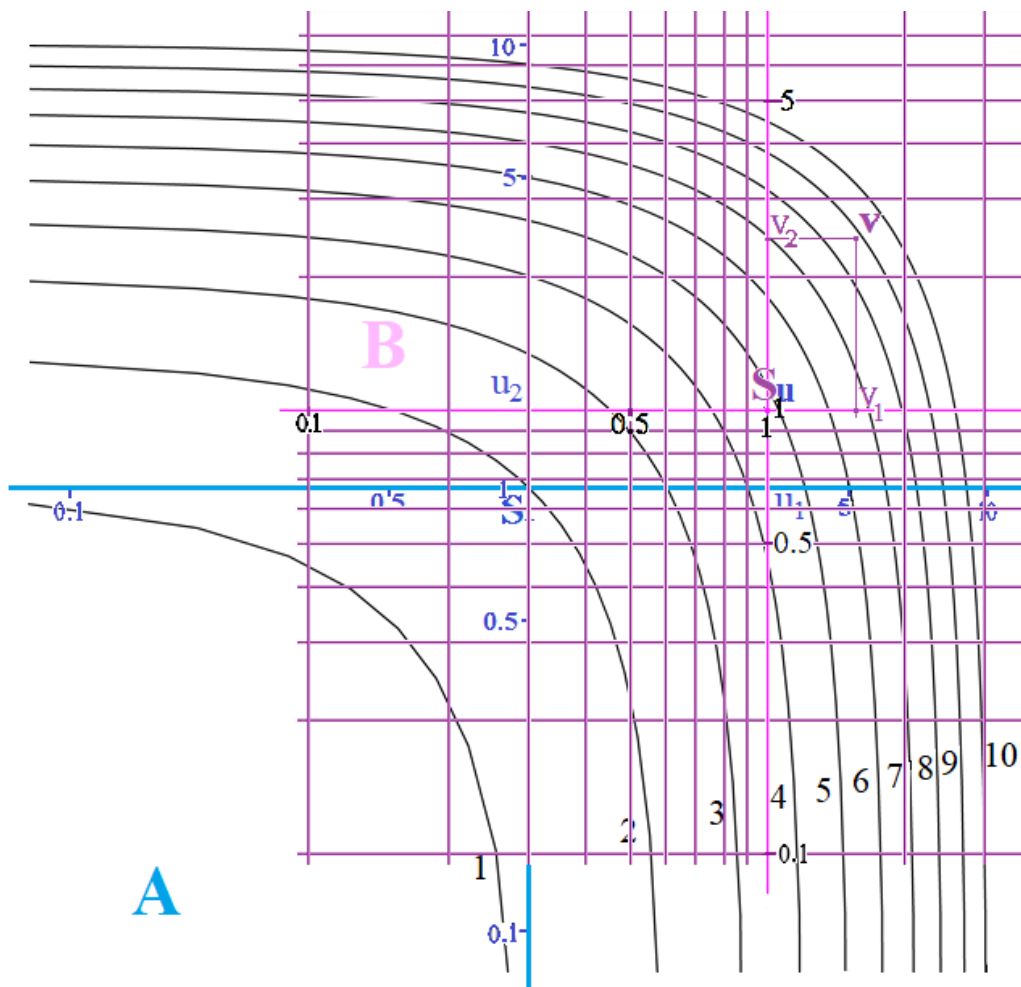
2. **Ábra:**  $x + y = 10$  a log-log papíron, kézzel



3. **Ábra:**  $A$  rendszer, log-log skála és az  $y + x = c$  szintvonalak (géppel)



4. Ábra:  $B$  rendszer, log-log skála



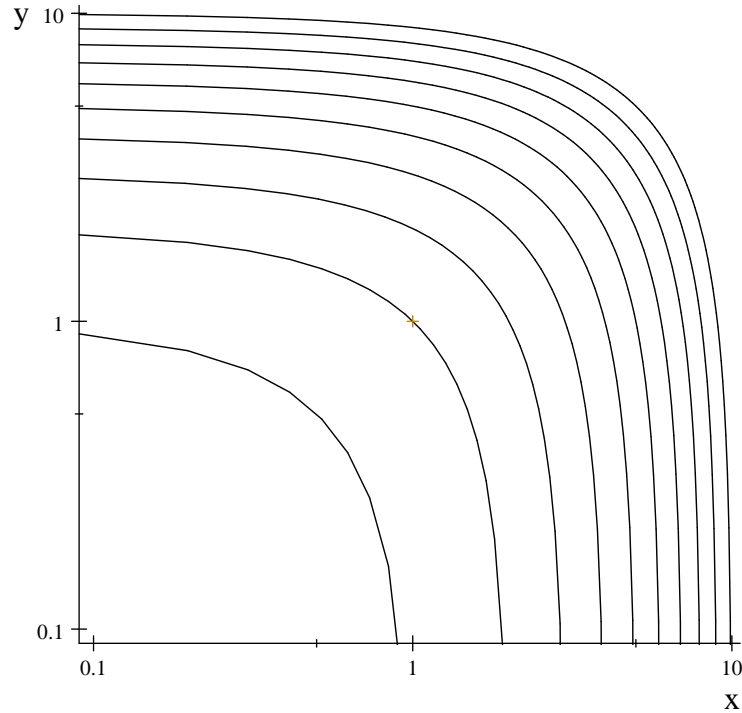
5. Ábra:  $A$  és  $B$  rendszerek egymásra téve

### 3. Egy kis matematika

A szintvonalak általában az  $F(x, y) = c$  különböző  $c$  konstansokhoz tartozó pontok halmazai.



"loglog" koordinátarendszert a legtöbb matematikai program és Excel is képes kezelni:



**6. Ábra:**  $x + y = c$  "görbék", log-log skálákkal  
 $c = 10, 9, \dots, 1$

Most vizsgáljuk meg, hogy a fenti görbéknek mi az egyenlete a *derékszögű koordinátarendszerben*. Ez az általános módszer hasznunkra lesz a következő fejezetekben, mert például négyzetes és reciprokok skálájú koordinátarendszereket már csak a [HM] program ismer.

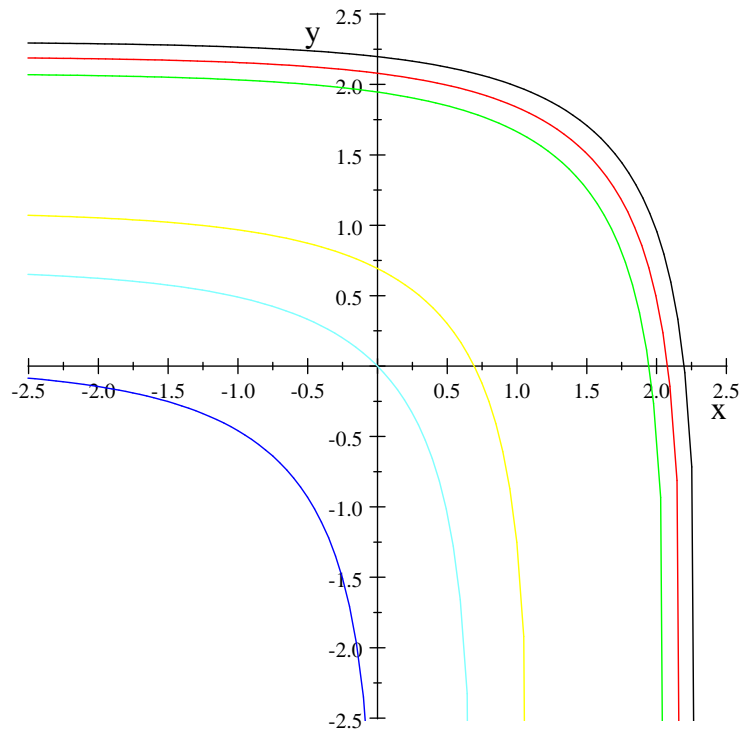
Mivel  $x = e^{d_x}$  és  $y = e^{d_y}$ , ezért az

$$F(d_x, d_y) = e^{d_x} + e^{d_y} = c \quad (12)$$

egyenlet ekvivalens a

$$d_y = \ln(c - e^{d_x}) \quad (13)$$

összefüggéssel, tehát az " $y = \ln(c - e^x)$ " ( $x < \ln(c)$ ) függvénygörbékét kell felrajzolnunk:



7. **Ábra:**  $y = \ln(c - e^x)$  görbék Descartes rendszerben  
 $c = 10, 9, 8, 3, 2, 1$

## 4. Áramkörök

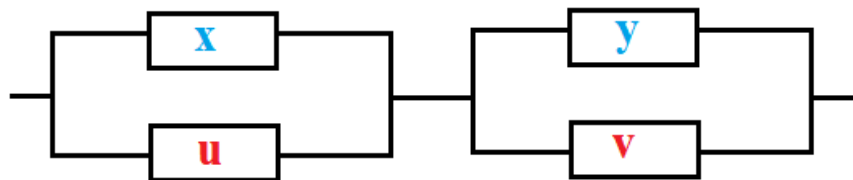
Most  $i = 1, 2, 3, 4$  esetén legyen  $f_i(x_i) = \frac{1}{x_i}$  és

$$F(d_1, d_2) = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}, \quad (14)$$

akkor (8) jelentése

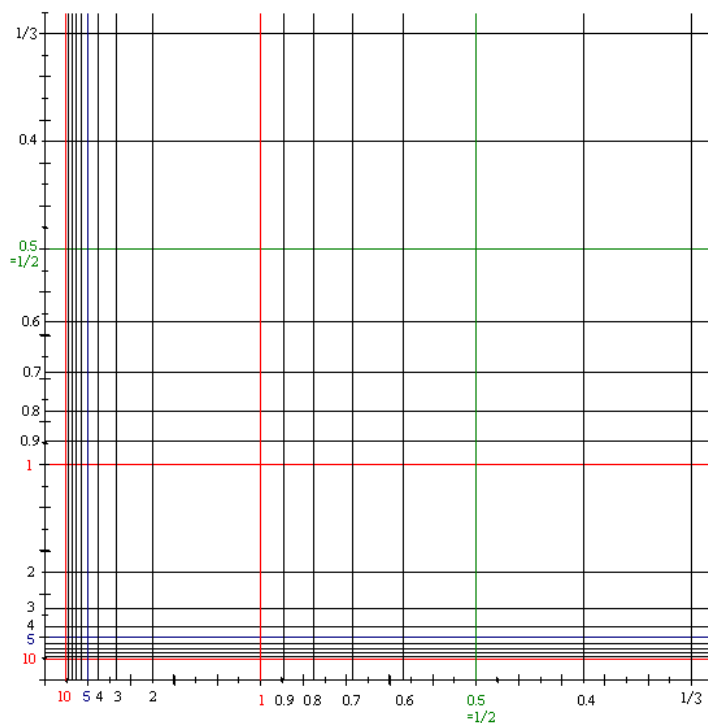
$$z = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{u}} + \frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{v}}, \quad (15)$$

ami a következő kapcsolási rajznak felel meg:



8. **Ábra:** *Párhuzamos kapcsolás*

Sajnos *Excel / Maple / MatLab / Mathematica / ...* stb. nem tudnak reciprok skálájú koordinátarendszerekben ábrázolni, de a [HM] szakdolgozat programja igen. Skálákat [Sz2], [Sz3], [WL] -ben, koordinátarendszereket és alkalmazásokat [Sz5], [Sz6] -ban találhatunk.



9. **Ábra:** *Reciprok skálák*

Nagyobb felbontásban ld. [Sz5] -ben vagy a következő linken:  
<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/koordinata/reciprok-skala-160.gif> .

Vegyük észre, hogy az  $\mathcal{A}$  koordinátarendszerben (14) ismét ekvivalens az

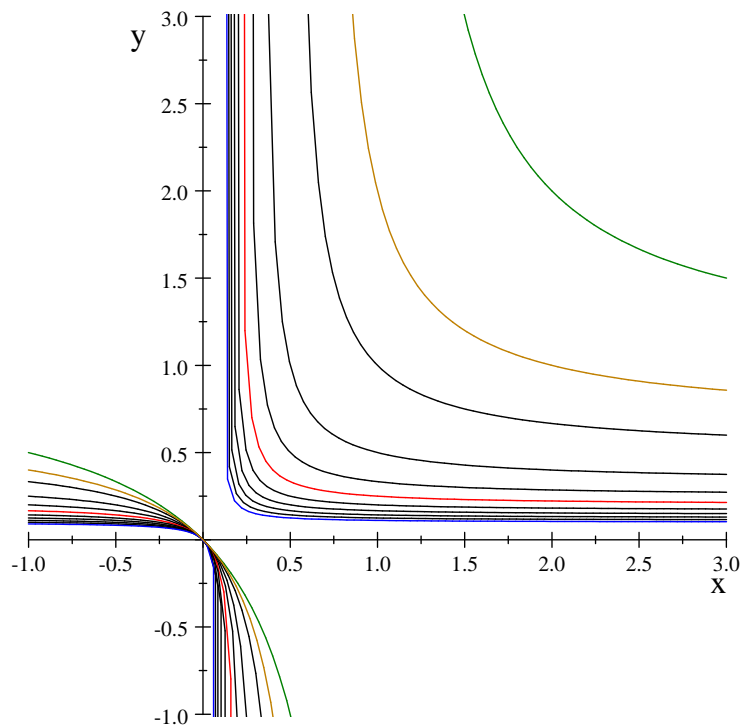
$$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = c \quad (16)$$

alakkal, de most a szintvonalak mások lesznek (a Descartes-koordinátarendszerben):

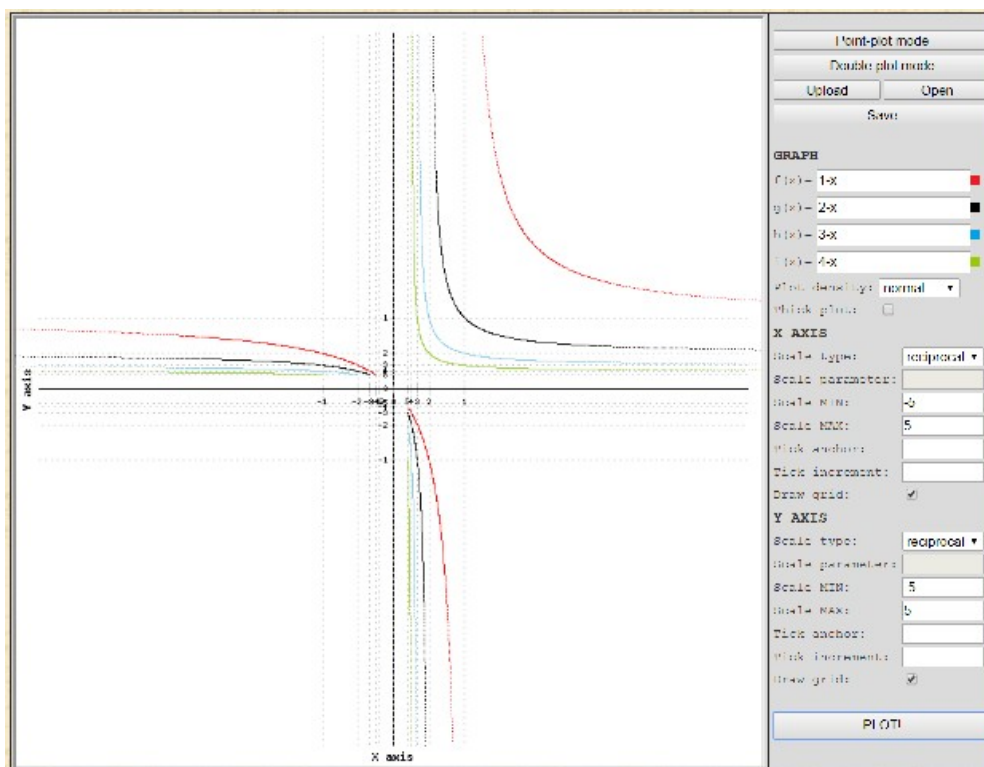
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c \quad (17)$$

azaz

$$y = \frac{1}{c - \frac{1}{x}} = \frac{x}{cx - 1} = \frac{\frac{1}{c} \cdot (cx - 1) + \frac{1}{c}}{cx - 1} = \frac{1}{c} + \frac{\frac{1}{c}}{cx - 1} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{x - \frac{1}{c}}$$



**10. Ábra:**  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c$  szintvonalak a Descartes koordinátarendszerben  
 $c = 1, 1.5, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ .



11. Ábra: Szintvonalak a reciprok koordináta-rendszerben [HM]

A szintvonalak mind átmennek az Startponton (origón):  $S(0, 0) = S(”\infty”, ”\infty”)$ .

## 5. Polárkoordináta rendszerek

Komplex számok szorzását és osztását, trigonometrikus alakjuk alapján könnyen megvalósíthatjuk kétdimenziós koordináta-rendszerek segítségével, a fenti módszerrel.

Az  $\mathcal{A}$  és  $\mathcal{B}$  rendszerek majdnem közönséges polár-koordináta rendszerek: a távolság (sugár) köröket logaritmikus skála szerint kell rajzolnunk. A szögek mérésére ismét használhatjuk például a mérnöki rajzasztalok [WD] mozgatható vonalzóját, ami adott szögben el is forgatható, beépített szögmérővel rendelkezik. Ez házi feladat az Olvasóknak.

## 6. Zárszó

A fentieket nyilván nem gyakorlati megvalósítás és alkalmazás céljából írtuk le, hanem, mert (szerintem) a geometria és függvények kapcsolatának egy nagyon jó szemléltetése, mint minden analóg számolóeszköz (léc, gép, ábra, nomogram, ...). Lásd még az [Sz3] cikket.

Bár a magasabb dimenziós ábrázolás matematikája nem bonyolultabb a fentieknél, az ábrázolás 3D nyomtatót és kissé bonyolultabb programozást kíván.

Ennek ellenére várjuk az Olvasók ötleteit a módszer további "felhasználásaira", különböző skálák (pl. [HM], [Sz3]) esetén.

## 7. Hivatkozások

[HM] **Horváth Márton:** *Linearizáló koordinátatranszformációk számítógépes támogatása*, Szakdolgozat, Pannon Egyetem, 2015,

<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/HorvathM-program/> (működő php program),

<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Szakdolgozat-HM-150511.pdf> ,

<http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/HMarton.zip>

[Sz1] **Szalkai István:** *Mit tudhat egy logarléc?*, KöMaL 1977/4, 146-151. old.,

<http://db.komal.hu/scan/1977/04/97704146.g4.png> , ... ,

<http://db.komal.hu/scan/1977/04/97704151.g4.png> ,

vagy: <http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Szalkai-1977-KoMaL.pdf>

[Sz2a] **Szalkai István:** *General Two-Variable Functions on the Slide Rule*, Journal of the Oughtred Society, 27:1, Spring 2018, pages 14-18.

[Sz2b] \_\_\_\_\_ , arxiv.org, 2016, <http://arxiv.org/abs/1612.03955>

[Sz3a] **Szalkai István:** *On the General Shape of Scales on Slide Rules*, Journal of the Oughtred Society, megjelenés alatt.

[Sz3b] \_\_\_\_\_ , arxiv.org, 2017, <http://arxiv.org/abs/1706.03286>

[Sz4] **Szalkai István:** *All Scales  $x^\alpha$  on One Slide Rule*, Journal of the Oughtred Society, benyújtva,

<https://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Onescal-1e2hasab-jav.pdf>

[Sz5] **Szalkai István:** *Szokatlan koordinátarendszerek, avagy linearizáló módszerek*, Haladvány Kiadvány, 2015, <http://www.math.bme.hu/~hujter/150821.pdf>

[Sz6] **Szalkai István:** *Mathematical Statistics and Stochastic Processes*,  
6.5.alfejezet "*Nonlinear regressions - linearizing methods*", 2019,  
<https://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Stoch-Book-19.pdf>

[WD] **Wikipedia:** *Drafting machine*,  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Drafting\\_machine](https://en.wikipedia.org/wiki/Drafting_machine)

[WL] **Wikipédia:** *Logarléc*, <http://hu.wikipedia.org/wiki/Logarléc>