Haladvány Kiadvány 2019-12-31

Kettőezer-húsz köszöntése egy feladvánnyal

Hujter Mihály
hujter.misi@gmail.com

Tartalmi összefoglaló. Ebben a dolgozatban egy feladvánnyal búcsúztatjuk az óesztendőt és köszöntjük az újesztendőt.

Ajánlás. *Ramanujan* emlékére halálának centenáriuma alkalmával.

Köszönet. A szerző hálás Bollobás Béla és Bollobás Gabriella támogatásáért.

Bevezetés. Jelöljenek a, b, c olyan nemnegatív egész számokat, melyek összege tízes számrendszerben 2015-re, 2020-ra, vagy 2025-re végződik. Bizonyítandó, hogy $a^4 + b^4 + c^4$ nem végződhet sem 2019-re, sem 2021-re.

Kétféle bizonyítás is adunk. Az első olyan, hogy egy átlagos matematikus is rájöhet. A második viszont felhasználja a száz éve elhunyt *Ramanujan* egy szép képletét.

Első bizonyítás. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha $a + b + c$ osztható 5-tel, akkor sem $a^4 + b^4 + c^4 + 1$, sem $a^4 + b^4 + c^4 - 1$ nem lehet 5-tel osztható. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy a, b, c olyan egészek, melyekre $0 \leq a \leq b \leq c \leq 4$. Esetszétválasztással fogunk dolgozni; minden esetben megmutatjuk majd, hogy $a^4 + b^4 + c^4$ értéke a $0, 2, 3$ számok valamelyikével kongruens modulo 5.

Amikor $a = b = 0$, akkor $c = 0$, és így $a^4 + b^4 + c^4 = 0$.

Amikor $a = 0$, $b = 1$, akkor $c = 4$, és így $a^4 + b^4 + c^4 = 217$.

Amikor $a = 0$, $b = 2$, akkor $c = 3$, és így $a^4 + b^4 + c^4 = 97$.

Amikor $a = b = 1$, akkor $c = 3$, és így $a^4 + b^4 + c^4 = 83$.

Amikor $a = 1$, $b = 2$, akkor $c = 2$, és így $a^4 + b^4 + c^4 = 33$.

Amikor $a = 2$, $b = 4$, akkor $c = 4$, és így $a^4 + b^4 + c^4 = 528$.

Amikor $a = 3$, $b = 3$, akkor $c = 4$, és így $a^4 + b^4 + c^4 = 418$.

Mivel további esetek nem lehetségesek, a bizonyítás kész, hiszen a 0, 33, 83, 97, 217, 418, 523 számok mindegyike a $0, 2, 3$ számok valamelyikével kongruens modulo 5.

Megjegyzés. A fenti bizonyítás nyilván működik minden olyan esetben, amikor $5|a+b+c$. Amikor még $10|a+b+c$ is teljesül, akkor egyszerűbb bizonyítás is van, mert ekkor a, b, c közül vagy 0 vagy 2 darab szám páratlan, és így $a^4 + b^4 + c^4$ is páros.

Második bizonyítás. *Ramanujan* (magyarul: *Rámánudzsen*, ahol nyílt *e*-t kell kiejteni, ahogyan például az *ember* szó első *e*-jét) egy zseniális indiai matematikus volt; 1887-től 1920-ig élt. Sok szép formulát hagyott ránk, melyeket a *Jóisten gondolatai* jelzővel illetett. A következő formulája — némi türelmes figyelemmel

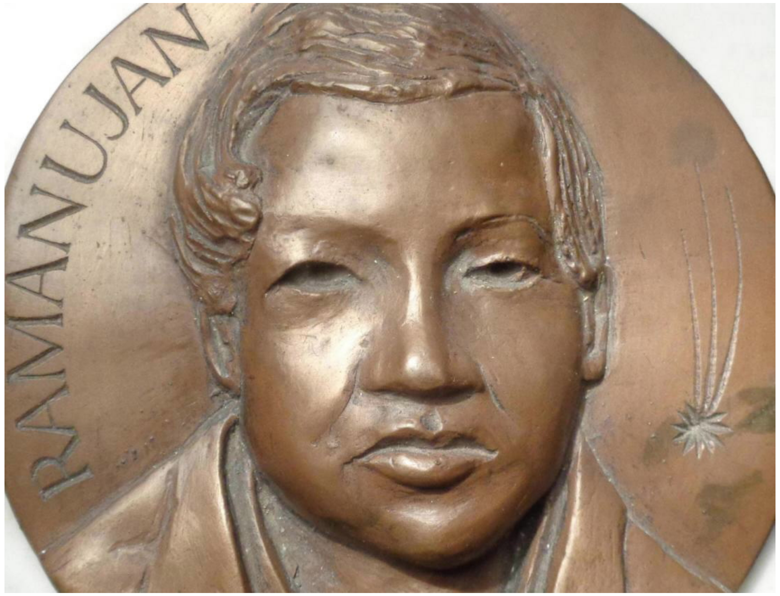
— könnyen ellenőrizhető:

$$\begin{aligned} & x^4+y^4+z^4-2(xy+yz+zx)^2 \\ = \; & (x+y+z)\Big(x^2\,(x-y-z)+y^2(y-z-x)+z^2(z-x-y)-2xyz\Big) \end{aligned}$$

A bizonyítandó állításra alkalmazva a fenti formulát megkapjuk, hogy ha $a^4+b^4+c^4+1$ vagy $a^4+b^4+c^4-1$ utolsó négy számjegye 2020 lenne, akkor $2(ab+bc+ca)^2$ maradéka 5-tel osztva 1 vagy 4 lenne, ami párosság okán azt jelentené, hogy $2(ab+bc+ca)^2$ utolsó számjegye 4 vagy 6 lenne, amiből következően $(ab+bc+ca)^2$ utolsó számjegye $2, 3, 7$ vagy 8 lenne, márpedig egyik sem lehet egy négyzetszám utolsó számjegye.

Megjegyzés. Rámánudzsen idézett tétele a következő formában a legismertebb (mint például *Tattersall* hivatkozott munkájában): *Ha* $x+y+z=0$, *akkor*

$$x^4+y^4+z^4=2(xy+yz+zx)^2$$



Rámánudzsen arca. Rámánudzsenről csak rossz minőségű fényképek maradtak. Ezért inkább Bollobás Gabriella plakettjét mutatjuk meg. Sok érdekes életrajzi adat nyerhető magyarul a *Wikipédia* szócikkéből, továbbá *Turán Pál* és *Szemjon G. Gingyikin* hivatkozott munkáiból.

Hivatkozások

Wikipédia: *Srínivásza Rámánudzsan*, 2019.

Turán Pál: *Egy különös életút: Ramanujan*, *I. és II.*, KöMaL, 1977.

Bollobás Gabriella: *Ramanujan*, Plakett (Hujter M. felvétele 2019-ben).

Tattersall, James J.: *Elementary Number Theory in Nine Chapters*, Cambridge University Press, 1999.

Gingyikin, Szemjon Grigorjevics: *Történetek fizikusokról és matematikusokról*, Második, javított kiadás, Typotex, 2004. (*Ramanujan rejtélye* fejezet, Major Péter fordítása)