Haladvány Kiadvány 2020-01-17

Rámánudzsen lánctörttel kereste a házszámot

Hujter Mihály
hujter.misi@gmail.com

Tartalmi összefoglaló. Ebben a dolgozatban egy 1914 decemberében, Londonban történt frappáns feladatmegoldás háttértitkait kutatjuk.

Ajánlás és köszönet. *Rámánudzsen* (angolul *Ramanujan*) emlékére 100 évvel a halála után; köszönettel Bollobáséknak a támogatásáért.

Bevezetés. Ezerkilencszáztizennégy decemberében, amikor már dúlt a Világháború, egy londoni havilap egy érdekes feladványt tűzött ki az olvasóinak. Vélhetően az volt a szándék, hogy a nyájas olvasók ne a harctéri borzalmakon, hanem inkább egy érdekes (és nehéz, hosszú megoldási időt igénylő) feladványon törjék a fejüket a karácsonyi ünnepekben.

A képes havilap neve: *The Strand Magazine*. Már negyed évszázaddal korábban, 1890 karácsonyára is megjelent. Ebben a sajtótermékben kaptak nyomdafestéket például *Arthur Conan Doyle* hamar világhírűvé vált történetei *Sherlock Holmes* kalandjaiként. Később nehéz feladványok sorozata is öregbítette az újság hírnevét.

A tamil nemzetiségű, zseniális matematikus indiai fiatalember, *Srinivasa Ramanujan* (1887–1920) éppen vegetáriánus ebédjét készítette, amikor egy másik indiai (nevezetesen *P. C. Mahalanobis*, a később híressé vált statisztikus) felolvasta a

Strand újság aktuális feladványát: *Egy utcában sorban megszámozottak a házak az elsőtől az utolsóig, és csak azt tudjuk, hogy több mint 50, de kevesebb, mint 500 ház van. Hányadik az a ház, melytől balra a házszámok összege megegyezik a kiszemelt háztól jobbra lévő épületek házszámainak összegével?*

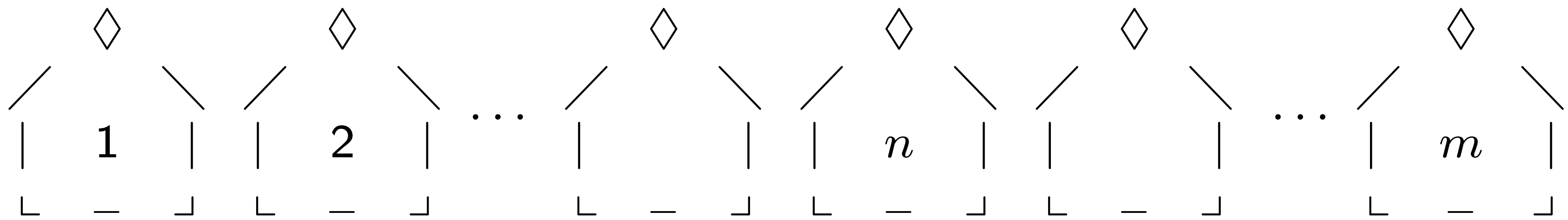
Rámánudzsen — mivel nem latin betűs nyelvű ország polgára, ezért magyarul kiejtés szerint kell írnunk a nevét — nem hagyta félbe a répapucolást, hanem kivágta a rezet: 204-edik a 288 ház közül.

— *Hogy a csudába csináltad?* — kérdezte honfitársa. — *Lánctörtekkel* — fukarkodott a válasszal a matematika történetének egyik legfurább alakja.

A feladvány értelmezése. Ha az utcában tíznél kevesebb ház lehetne, akkor hamar kinyertük volna a megoldást: *Nyolc ház közül a hatodik*. Íme az indoklás:

$1+2+3+4+5=7+8$. Mivel azonban a kiszemelt ház sorszáma és a házak darabszáma is nagyon magas lehet, százezres nagyságrendben vár ránk a próbálkozások unalmas sorozata.

A feladvány algebrai megfogalmazása. A házak darabszáma legyen m, a kiszemelt ház sorszáma pedig n.



Az n-ediktől balra lévő házszámok összege:

$$1+2+\cdots+n-2+n-1=\frac{(n-1)n}{2}$$

A jobboldali házszámok összege:

$$n+1+n+2+\cdots+m-1+m=\frac{(m-n)(m+n+1)}{2}$$

Tehát $(n-1)n=(m-n)(m+n+1)$, ami átrendezés után ezzé egyszerűsödik: $m(m+1) = 2n^2$. A ravasz detektívtörténeteken pallérozott elméjű nyájas olvasók közül bizonyára többen eljutottak idáig. De hogyan folytassuk? Lehet, hogy Rámánudzsen — önmagához méltó módon, tehát fejben — továbbalakította a fenti egyenletet, és ezt nyerte:

$$\left(2m+1-\sqrt{2}\,(2n)\right)\left(2m+1+\sqrt{2}\,(2n)\right)=1$$

Ennek részeként meglátta azt a képletet, hogy $1+\sqrt{2}$. Erre talán eszébe ötlött, hogy végtelen lánctörtként

$$1+\sqrt{2}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$$

Ha most a jobb oldalt csak csonkítva számoljuk ki, akkor erre jutunk:

$$\sqrt{2}\approx -1+2+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

A számláló és a nevező szorzataként megkapjuk, hogy $n=6$. A nevező négyzetének kétszereseként azt nyerjük, hogy $m=8$. Mivel ez az érték nem nagyobb 50-nél, megpróbálkozunk kétszer pontosabb csonkítással:

$$\sqrt{2}\approx -1+2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}=\frac{17}{12}$$

Mármost $n = 17 \cdot 12 = 204$ és $m = 2 \cdot 12^2 = 288$ megoldja a havilap feladványát, hiszen

$$\sum_{j=1}^{203} j = 20706 = \sum_{j=205}^{288} j$$

A lánctörtes módszer helyessége. Most megmutatjuk, hogy a fenti lánctörtes módszerrel az $m(m+1) = 2n^2$ egyenletnek végtelen sok megoldása állítható elő pozitív egész m és n számokra. Valamely adott k pozitív egész számra számítsuk ki $\sqrt{2}$ közelítését a fenti módszerrel úgy, hogy a lánctörtből pontosan $2k$ darab 2-est írjunk ki! A kiszámított tört számlálója (az egyszerűsítések elvégzése után) p_k, a nevező pedig q_k. Nyilván $p_1 = 3$ és $q_1 = 2$. Meg fogjuk mutatni a következőket:

Lemma 1. Minden pozitív egész k-ra $p_{k+1} = 3p_k + 4q_k$ és $q_{k+1} = 2p_k + 3q_k$.

Lemma 2. A p_k és q_k számok mátrixszorzással is megkaphatók minden k-ra:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_k \\ q_k \end{bmatrix}$$

Lemma 3. Az $n = p_k q_k$ és $m = 2q_k^2$ számok kielégítik az $m(m+1) = 2n^2$ egyenletet, $k = 1, 2, \cdots$.

Most sorban bizonyítjuk a lemmákat.

Lemma 1 bizonyítása. Teljes indukciós bizonyításhoz elég annyit megmutatni, hogy a

$$-1 + 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{p_k}{q_k}}} = \frac{3p_k + 4q_k}{2p_k + 3q_k}$$

képlet esetében a számlálóba írt $3p_k + 4q_k$ és a nevezőbe írt $2p_k + 3q_k$ relatív prímek. Felhasználjuk, hogy definíció szerint p_k és q_k relatív prímek. Ha egy d pozitív egész szám osztja $3p_k + 4q_k$ és $2p_k + 3q_k$ mindegyikét, akkor osztja a

$$3\,(2p_k + 3q_k) - 2\,(3p_k + 4q_k) = q_k$$

számot is és a

$$(3p_k + 4q_k) - (2p_k + 3q_k) - q_k = p_k$$

számot is, tehát $d = 1$. Ezzel a lemma bizonyítása teljes.

Lemma 2 bizonyítása. Mivel

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

és mivel

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{k+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{k} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

ezért Lemma 1 alapján készen vagyunk teljes indukcióval, hiszen

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_k \\ q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3p_k + 4q_k \\ 2p_k + 3q_k \end{bmatrix}$$

Lemma 3 bizonyítása. Meg kell muntatnunk, hogy minden pozitív egész k-ra fennáll, hogy $\left(2q_k^2\right)\left(2q_k^2+1\right) = 2(p_k q_k)^2$ azaz, hogy $p_k^2 - 2q_k^2 = 1$. Most is teljes indugcióval dolgozunk. A $k = 1$ eset rendben, hiszen $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$. Feltéve, hogy fennáll $p_k^2 - 2q_k^2 = 1$, Lemma 1 alapján igazolandó: $(3p_k + 4q_k)^2 - 2\left(2p_k + 3q_k\right)^2 = 1$. Egyszerűsítés révén a bal oldal ez: $p_k^2 - 2q_k^2$. Tehát készen vagyunk.

A fentiek alapján látható, Rámánudzsen nem tódított a lánctörtekkel. De lánctörtek nélkül is cél ért volna, ha az $n = 6$, $m = 8$ megoldásból kiindulva megoldotta volna a

$$\begin{aligned} p_1 q_1 &= 6 & 2q_1^2 = 8 \\ p_2 &= 3p_1 + 4q_1 & q_2 = 2p_1 + 3q_1 \\ p_2 q_2 &= N & 2q_2^2 = M \end{aligned}$$

egyenletrendszert, és megkapta volna az $M = 288, N = 204$ megoldást.

További megoldások. A $k = 3, 4$ esetekben tekintsük a következőket:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99 \\ 70 \end{bmatrix}; \quad 99 \cdot 70 = 6930; \quad 2 \cdot 70^2 = 9800$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 577 \\ 408 \end{bmatrix}; \quad 577 \cdot 408 = 235416 \ ; \quad 2 \cdot 408^2 = 332928$$

Valóban

$$\sum_{j=1}^{6929} j = 24008985 = \sum_{j=6931}^{9800} j \qquad \sum_{j=1}^{235415} j = 27710228820 = \sum_{j=235417}^{332928} j$$

A folytatást megtaláljuk a `https://oeis.org/A082405` helyen: Tehát n lehetséges értékei: 6, 204, 6930, 235416, 7997214, 271669860, 9228778026, ... Az $n_1 = 6$, $n_2 = 204$ értékeből kiindulva az $n_{k+2} = 34n_{k+1} - n_k$ rekurzióval kapjuk a sorozatot.(Azt, hogy ez tényleg így van, később bizonyítjuk.) Tekintve, hogy az $m(m+1) = 2n^2$ egyenletet $n = 0$ és $m = 0$ is kielégíti, tulajdonképpen a 204-et, ami a *Strand* újság rejtvényének a megoldása, az $n_{k+2} = 34n_{k+1} - n_k$ képlet alapján is kinyerhetjük: $34 \cdot 6 - 0$.

A n szám lehetséges értékeiéhez hasonlóan az m szám lehetséges értékeit is megtaláljuk a `https://oeis.org/A132592` helyen: 8, 288, 9800, 332928, 11309768, 384199200, 13051463048 ... Ezeket a számokat az $m_1 = 8$, $m_2 = 288$ értékeből kiindulva az $m_{k+2} = 34m_{k+1} - m_k + 16$ rekurzióval kapjuk.. (Azt, hogy ez tényleg így van, később bizonyítjuk.) A *Strand* újság rejtvényének megoldásaként a 288-at megkaphattuk volna így is: $34 \cdot 8 - 0 + 16$.

Adósok vagyunk még a fent említett két rekurzió bizonyításával. A fentiek alapján ezt a két össszefüggést kell igazolnunk:

$$p_{k+2}q_{k+2} - 34p_{k+1}q_{k+1} + p_kq_k = 0 \qquad 2q_{k+2}^2 - 34 \cdot 2q_{k+1}^2 + 2q_k^2 - 16 = 0$$

Valóban, Lemma 1 miatt

$$\begin{aligned}
& p_{k+2}q_{k+2} - 34p_{k+1}q_{k+1} + p_kq_k \\
= \;& (3p_{k+1} + 4q_{k+1})\,(2p_{k+1} + 3q_{k+1}) - 34p_{k+1}q_{k+1} + p_kq_k \\
= \;& 6p_{k+1}^2 - 17p_{k+1}q_{k+1} + 12q_{k+1}^2 + p_kq_k \\
= \;& 6(3p_k + 4q_k)^2 - 17(3p_k + 4q_k)\,(2p_k + 3q_k) + 12\,(2p_k + 3q_k)^2 + p_kq_k = 0
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} & 2q_{k+2}^2 - 34 \cdot 2q_{k+1}^2 + 2q_k^2 - 16 \\ = \;& 2\left(2(3p_k + 4q_k) + 3\left(2p_k + 3q_k\right)\right)^2 - 68\left(2p_k + 3q_k\right)^2 + 2q_k^2 - 16 \\ = \;& \quad 16\left(p_k^2 - 2q_k^2 - 1\right) = 0 \end{aligned}$$

Számításaink befejezésül megemlítjük, hogy a rekurziókból könnyen igazolható, hogy az n_k számok utolsó számjegye ciklikusan 6,4,0, míg az m_k számok utolsó számjegye ciklikusan 8,8,0.

Kellettek-e a lánctörtek? Mint fent elmeséltük, Rámánudzsen a lánctörtekre gondolva találta meg az $n_2 = 204$ és $m_2 = 288$ számokat. A lánctörtek segítségével sikerült az n_k és m_k számokra vonatkozó rekurziókat bizonyítanunk. De ha már megvannak a rekurziók, akkor már nem kellenek tovább a lánctörtek, hiszen az $n_0 = 0$, $m_0 = 0$ és $n_1 = 6$, $m_1 = 8$ számpárokból csupán a rekurziók szerint is megkaphatók $n_2 = 204$ és $m_2 = 288$.

Rámánudzsen élete. Sok érdekes életrajzi adat nyerhető magyarul a *Wikipédia* szócikkéből, továbbá *Turán Pál* és *Szemjon G. Gingyikin* hivatkozott munkáiból.

Hivatkozások

Wikipédia: *Srínivásza Rámánudzsan*, 2020.

Wikipaedia: *The Strand Magazine*, 2020.

Turán P.: *Egy különös életút: Ramanujan, I. és II.*, KöMaL, 1977.

Nelsen, R. B.: *Nuggets of Number Theory – A Visual Approach*, MAA Press, 2018.

Gingyikin, Sz. G.: *Történetek fizikusokról és matematikusokról*, Második, javított

kiadás, Typotex, 2004. (*Ramanujan rejtélye* fejezet, Major P. fordítása)
Rao, C. R.: *Statistics and truth: putting chance to work*, World Scientific. ISBN 978-981-02-3111-8, 1997.
Strick, H. K.: *Srinivasa Ramanujan (Dec.22, 1887–Apr.26, 1920)*, Kézirat, 2018.
Ranganathan, Sh. R.: *Ramanujan, the man and the mathematician*, Asia Pub. House (*Great thinkers of India* series), ISBN 8170005574, 1967.