Haladvány Kiadvány 2020-02-02

Három érdekes, de nem megszerkeszthető szám

Hujter Mihály
`hujter.misi@gmail.com`

Tartalmi összefoglaló. A mai dátum érdekessége, hogy elölről és hátulról olvasva is két-két 20-assal kezdődik. Ez indított bennünket, hogy három konkrét számmal és azok érdekes kapcsolatrendszerével foglalkozzunk: $a = 2\cos 20^\circ$, $b = 2\cos 40^\circ$, $c = 2\cos 80^\circ$. Egyszerű bizonyításokkal meg fogjuk mutatni, hogy ezek körzővel és vonalzóval nem megszerkeszthető számok (ami azzal egyenértékű,

hogy a szabályos 9-szöget nem bírunk szerkeszteni, azaz a 60°-os szög harmadolása is lehetelen euklideszi értelemben). A megszerkeszthetetlenségek ellenére nagyon érdekes összefüggések állnak fenn a három szám között, amik legbonyolultabbikát a tamil *Rámánudzsen* (angolul: *Ramanujan*) vette észre bő egy évszázada. Ezt is bizonyítjuk itt, de elemi eszközökkel.

Ajánlás és köszönet. *Rámánudzsen* emlékére halálának centenáriuma alkalmával; hálával Bollobás B. és Bollobás G. támogatásáért.

Bevezetés. Legyenek $a = 2\cos 20^\circ$, $b = 2\cos 40^\circ$, $c = 2\cos 80^\circ$. Nyilván $2 > a > b > 1 > c > 0$. Először néhány egyszerűbb összefüggést mutatunk be a, b, c között:

(1) $\quad a = b + c \qquad\qquad$ (2) $\quad abc = 1$

A bizonyításokhoz fel fogjuk használni az ismert trigonometrikus azonosságokat:

$$\cos 2\zeta = 2\cos^2\zeta - 1 \qquad\qquad \cos 3\zeta = 4\cos^3\zeta - 3\cos\zeta$$

Ezekből következően

$$\begin{aligned} b &= a^2 - 2 \\ 3a + 1 &= 3a + 2\cos 60^\circ = 3a + \left(a^3 - 3a\right) = a^3 \\ c &= b^2 - 2 = \left(a^2 - 2\right)^2 - 2 = a^4 - 4a^2 + 2 \\ &= (3a+1)a - 4a^2 + 2 = -a^2 + a + 2 \end{aligned}$$

Innét (1) azonnal látszik; (2) igazolásához pedig ez elegendő:

$$\begin{aligned} abc-1 &= a(a^2-2)(-a^2+a+2)-1 \\ &= -a^5+a^4+4a^3-2a^2-4a-1 \\ &= a^3(-a^2+a+4)-2a^2-4a-1 = \\ &= (3a+1)(-a^2+a+4)-2a^2-4a-1 \\ &= 3(-a^3+3a+1) = 3(-a^3+a^3) = 0 \end{aligned}$$

A teljesség kedvéért idetesszük, hogy

$$\begin{aligned} 2-c^2 &= 2-(a^4-4a^2+2)^2 \\ &= 2-\Big((3a+1)a-4a^2+2\Big)^2 = -a^4+2a^3+3a^2-4a-2 \\ &= (-a+2)(3a+1)+3a^2-4a-2 = a \end{aligned}$$

Egy harmadfokú egyenlet, melynek gyökei: $-a$, b **és** c. Tekintsük az $f(x) = (x+a)(x-b)(x-c)$ polinomot. Mármost (1) és (2) miatt ez ilyen alakot nyer:

$f(x) = x^3 - (ab + ac - bc)\,x + 1$. A fentiek szerint

$$\begin{aligned} & ab + ac - bc \\ = \; & a(a^2 - 2) + a(-a^2 + a + 2) - (a^2 - 2)(-a^2 + a + 2) \\ = \; & a^4 - a^3 - 3a^2 + 2a + 44 = a^3(a-1) - 3a^2 + 2a + 4 \\ = \; & (3a+1)(a-1) - 3a^2 + 2a + 4 = 3 \end{aligned}$$

Tehát $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Tekintve, hogy $f(-a)$, $f(b)$, és $f(c)$ mindegyike nulla, ezért a, b, c mindegyike irracionális, hiszen ha $-a$, b, c bármelyike p/q alakba írható lenne, ahol p és q egész számok, relatív prímek, és $q \geq 2$, akkor

$$0 = q^3 \cdot 0 = q^3 \left(\left(\frac{p}{q}\right)^3 - \frac{3p}{q} + 1 \right) = p^3 - 3pq^2 + q^3$$

miatt p^3 osztható lenne q^2-tel, ellentmondva a relatív prímségnek.

A gyökök nem megszerkeszthetők. Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy a, b, c egyike sem szerkeszthető meg a szokásos euklideszi szerkesztési lépésekkel, körzővel és vonalzóval. Mivel szögek felezése és duplázása nem gond, a definíciójuk miatt a, b, c bármelyikéből a másik kettő hamar megszerkeszthető lenne. Tegyük fel, hogy valamelyik megszerkeszthető. Ezt úgy értjük, hogy kezdetben adottak az xy-koodinátarendszerben a $P_0(0; 0)$ és a $P_1(1; 0)$ pontok, és a megengedett szerkesztési lépések alkalmazásával megkonstruálhatók sorban a $P_2, P_3, \cdots, P_n$ pontok úgy, hogy P_n-nek az x-koordinátája az $\{a, b, c\}$ halmaz valamelyik eleme. Rögzítsünk egy ilyen szerkesztést. Most minden $k = 0, 1, \cdots, n$ esetén tekintsük azt a H_k számhalmazt, amely a lehető legszűkebb, de tartalmazza a $P_0, P_1, \cdots, P_k$ pontok mindegyikének az x- és az y-koodinátáját, tartalmazza a nullát is, továbbá bármely u és v nemnulla elemeire tartalmazza az $u + v$, $u - v$, uv és u/v számokat is. Világos, hogy H_1 a racionális számok halmaza, H_n bővebb, mint a racionális számok halmaza, és hogy

$$H_1 \subseteq H_2 \subseteq \cdots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n$$

Tekintsük a lehető legnagyobb m indexet, melyre egyrészt $H_m \neq H_{m+1}$, másrészt a H_{m+1} halmaz már tartalmazza elemként a P_n pont x-koordinátáját. Tekintsük azt a pillanatot, amikor megszerkesztettük a P_{m+1} pontot. Három eset valamelyike lehetséges: (S_1) Két egyenes metszéspontjaként kaptuk meg. (S_2) Egy egyenes és egy kör metszéspontjaként kaptuk meg. (S_3) Két kör metszéspontjaként kaptuk meg. Az egyenes(ek) egyenlete $Ax + By + C = 0$ alakú, ahol $A, B, C \in H_m$. A kör(ök) egyenlete $(x - U)^2 + (y - V)^2 = W$ alakú, ahol $U, V, W \in H_m$.

Az S_1 esetben a P_{m+1} pont x- és y-koordinátáját az $Ax + By + C = 0$, $A'x + B'y + C' = 0$ egyenletrendszer megoldásaként kapjuk meg, ahol $A, A', B, B', C, C' \in H_m$ és $AB' \neq BA'$ (mert metsző egyenesekről van szó). Mármost

$$x = \frac{BC' - CB'}{AB' - BA'} \qquad y = \frac{CA' - AC'}{AB' - BA'}$$

miatt H_{m+1} nem lehetne bővebb, mint H_m, tehát az S_1 eset lehetetlen.

Az S_2 esetben egy kör és egy egyenes két metszéspontja közül az egyik lenne a P_{m+1} pont, melynek x- és y-koordinátájára kapjuk az $Ax + By + C = 0$, $(x-U)^2 + (y-V)^2 = W$ egyenletrendszert, ahol $A, B, C, U, V, W \in H_m$. Állítjuk, hogy a metszéspontok x- és y-koordinátája $S + T\sqrt{R}$ alakú, ahol $S, T, R \in H_m$. Ennek igazolására az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $U = 0$, $V = 0$, $W = 1$, továbbá hogy $C \in \{0, 1\}$. Nyilván nem lehet A és B mindegyike nulla. Tehát két alesetünk van: (S_2a) $C = 0$. (S_2b) $C = 1$. Az S_2a esetben $\{x, y\} \subseteq \{-1, 0, 1\}$, ha $AB = 0$, és

$$\{\ |x|\ ,\ |y|\ \} \subseteq \{\ \frac{|A|}{\sqrt{A^2+B^2}}\ ,\ \frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2}}\ \}$$

ha $AB \neq 0$. Az S_2b esetben ez az egyenletrendszer: $Ax+By+1 = 0$, $x^2+y^2 = 1$. Mármost $A = 0$ esetén $|x| = \sqrt{1 - B^{-2}}$, $y = -B^{-1}$. Hasonlóképpen

$B=0$ esetén $x=-A^{-1}$, $|y|=\sqrt{1-A^{-2}}$. Végül $AB\neq 0$ esetén

$$x=\frac{-A+B\sqrt{A^2+B^2-1}}{A^2+B^2} \qquad y=\frac{-B-A\sqrt{A^2+B^2-1}}{A^2+B^2}$$

vagy

$$x=\frac{-A-B\sqrt{A^2+B^2-1}}{A^2+B^2} \qquad y=\frac{-B+A\sqrt{A^2+B^2-1}}{A^2+B^2}$$

Tehát az állításunk bizonyított a következő S,T,R értékekre:

$$S=\frac{-A}{A^2+B^2} \qquad T=\frac{\pm\, B}{A^2+B^2} \qquad R=\sqrt{A^2+B^2-1}$$

Most a S_3 esetet vizsgáljuk. Feltehetjük, hogy a két egymást metsző kör egyenlete:

$$(x-U)^2+(y-V)^2=W \qquad (x-U')^2+(y-V')^2=W'$$

ahol $U, U', V, V', W, W' \in H_m$. Kivonva a másodikból az első köregyenletet egy olyan egyenes egyenletét kapjuk, mely egyenes átmegy a körök mindkét metszéspontján:

$$2(U - U')x + 2(V - V')y + W - W' = 0$$

Visszajutottunk tehát a már elintézett S_2 esethez.

Tekintettel arra, hogy $H_m \neq H_{m+1}$ és arra, hogy az $S + T\sqrt{R}$ alakú számok összege, különbsége, szorzata és hányadosa is hasonló alakú, a fentiekből azt nyerjük, hogy a H_m halmazból alkalmasan vett konkrét A, B számokra az H_{m+1} halmaz a lehető legszűkebb halmaz, mely tartalmazza H_m-et, a négy alapműveletre zárt, és tartalmazza elemként egy konkét $R \notin H_m$ számot is (ahol történetesen $R = \sqrt{A^2 + B^2 - 1}$ a fenti értelemben). Az m szám definíciójának következtében erre a konkrét R számra és alkalmasan vett $s, t \in H_m$ számokra, ahol $t \neq 0$, a

$-a, b, c$ számok közül egalább egy felírható $s + tR$ alakban. Mivel mindhárom szám gyöke az $x^3 - 3x + 1 = 0$ egyenletnek, ezért $(s+tR)^3 - 3(s+tR) + 1 = 0$. Átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$t\left(R^2t^2 + 3s^2 - 3\right)R + 3st^2R^2 + s^3 - 3s + 1 = 0$$

Mivel az $R^2t^2 + 3s^2 - 3$ és az $3st^2R^2 + s^3 - 3s + 1$ számok H_m-beli elemek, akárcsak a nulla, és mivel $R \notin H_m$, ezért $R^2t^2 + 3s^2 - 3 = 0$. Tehát

$$(s + tR)^3 - 3(s + tR) + 1 = 3st^2R^2 + s^3 - 3s + 1$$

Itt a jobb oldal nem változik meg, ha t helyett $-t$ kerül beírásra. Mindazonáltal azt kapjuk, hogy nem csak $s + tR$, hanem $s - tR$ is gyöke az $x^3 - 3x + 1 = 0$ egyenletnek.

Tekintettel arra, hogy $tR \neq 0$, az $s + tR$ és az $s - tR$ számok az $-a, b, c$ számok közül két különbözőt alkotnak, és $(s + tR)(s - tR) = s^2 - R^2t^2 \in H_m$ meg és

$abc = 1$ miatt az $-a, b, c$ számok közül a harmadik H_m-beli. A három szám közül tehát kettő nem H_m-beli, egy pedig H_m-beli. Tekintve a $b = a^2 - 2$, $c = b^2 - 2$, $a = 2 - c^2$ azonosságokat, viszont mindhárom szám H_m-beli, ha már csak egy H_m-beli is van köztük. Ez az ellentmondás tehát azt jelenti, hogy az a, b, c számok egyike sem szerkeszthető meg körzővel, vonalzóval. Így aztán sem egy 60°-os szög nem harmadolható, sem a szabályos 9-szög nem megszerkeszthető.

Rámánudzsen azonossága. Az a, b, c számok között fennáll a következő, úgynevezett *Ramanujan identity*:

$$\sqrt[3]{2\cos 80^\circ} + \sqrt[3]{2\cos 40^\circ} - \sqrt[3]{2\cos 20^\circ} = \sqrt[3]{3^{5/3} - 6}$$

Erre is adunk itt egy bizonyítást. Tekintsük a

$$g(x) = (x + \sqrt[3]{a})(x - \sqrt[3]{b})(x - \sqrt[3]{c})$$

polinomot. Mivel $abc = 1$, ezért valamely p, q valós számokra

$$g(x) = x^3 - px^2 + qx + 1$$

Azt kell bizonyítanunk, hogy $p = \sqrt[3]{3^{5/3} - 6}$, azaz, hogy $\left(p^3 + 6\right)^3 = 3^5$.

Tekintsük a $g(x) = 0$ egyenletet, azaz — átrendezés és köbre emelés után — azt, hogy $(x^3 + 1)^3 = \left(px^2 - qx\right)^3$. Újabb átrendezés az egyenlet következő alakját eredményezi:

$$x^9 + \left(3 - p^3\right)x^6 + 3pq\left(px^2 - qx\right)x^3 + \left(3 + q^3\right)x^3 + 1 = 0$$

azaz $px^2 - qx = x^3 + 1$ miatt

$$x^9 + \left(3qp - p^3 + 3\right)x^6 + \left(q^3 + 3pq + 3\right)x^3 + 1 = 0$$

Az $y = x^3$ helyettesítéssel a következő alakot nyerjük:

$$y^3 + \left(3pq - p^3 + 3\right) y^2 + \left(3pq + q^3 + 3\right) y + 1 = 0$$

Tekintve, hogy a $g(x) = 0$ egyenlet gyökei $-\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{c}$, ezért a fenti utolsó egyenlet gyökei $-a, b, c$; mindazonáltal a fenti egyenlet azonos az $f(y) = 0$ egyenlettel. Tehát $3pq - p^3 + 3 = 0$ és $3pq + q^3 + 3 = -3$. Az első egyenletből látszik, hogy $p \neq 0$, és második egyenletből látszik, hogy $q \neq 0$. Az első egyenletből kifejezve q értékét, azt behelyettesítve a második egyenletbe, majd azt $27p^3$-bel szorozva megkapjuk, ami kell:

$$\begin{aligned} 0 &= 27p^3 \left(3p \cdot \frac{p^3 - 3}{3p} + \left(\frac{p^3 - 3}{3p}\right)^3 + 6\right) \\ &= p^9 + 18p^6 + 108p^3 - 27 = \left(p^3 + 6\right)^3 - 3^5 \end{aligned}$$

Következésképpen

$$q = \frac{p^3 - 3}{3p} = \frac{3^{5/3} - 9}{3 \cdot \sqrt[3]{3^{5/3} - 6}} = \frac{3^{5/3} - 9}{\sqrt[3]{3^{14/3} - 2 \cdot 3^4}}$$

és így a $g(x)$ polinomból azt kapjuk, hogy

$$\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{ac} - \sqrt[3]{bc} = \frac{9 - 3^{5/3}}{\sqrt[3]{3^{14/3} - 2 \cdot 3^4}}$$

azaz hogy

$$\sqrt[3]{\cos 20^\circ \cos 40^\circ} + \sqrt[3]{\cos 20^\circ \cos 80^\circ} - \sqrt[3]{\cos 40^\circ \cos 80^\circ} = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[3]{9} - 8}}$$

Ez tehát a Rámánudzsen-azonosság közeli rokona, és $abc = 1$ miatt

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\cos 80^\circ}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\cos 40^\circ}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\cos 20^\circ}} = \frac{\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{9} - 2}}$$

Emlékeztetünk, hogy $abc = 1$ és $ab + ac - bc = 3$ miatt $\frac{1}{\cos 80^\circ} + \frac{1}{\cos 40^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} = 6$. Az olvasóra bízzuk, hogy keressen zárt, alapműveletekkel és gyökjelekkel felírt formulát a

$$h(\alpha) = \left(\sqrt[3]{\cos 80^\circ}\right)^\alpha + \left(\sqrt[3]{\cos 40^\circ}\right)^\alpha - \left(\sqrt[3]{\cos 20^\circ}\right)^\alpha$$

kifejezés értékére az $\alpha = -2$ és $+2$ esetekben is. Tájékoztatásul közöljük a numerikus értékeket:

$\alpha\quad =$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(\alpha) =$	6	$3.3649\ldots$	$1.8644\ldots$	1	$0.4934\ldots$	$0.1890\ldots$	0

A fentiek alapján könnyen ellenőrizhető, hogy $h(-1) \cdot h(1) = 3 - \sqrt[3]{9}$.

Egymáshoz hasonló azonosságok. Számolásaink lezárásaként még megemlítünk öt darab, látszólag egy kaptafára készült azonosságot:
$2\cos 0^\circ = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 0^\circ}}}$; $2\cos 20^\circ = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-2\cos 20^\circ}}}$;
$2\cos 40^\circ - \sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos 40^\circ}}}$; $2\cos 60^\circ - \sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-2\cos 60^\circ}}}$;
$2\cos 80^\circ = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 80^\circ}}}$. Ezek közül az első és a negyedik trivialitás; ezeket csak az összehasonlíthatóság érdekében írtuk ide. A maradék három Rámánudzsen észrevétele, és a következő három formula érvényességének belátásához kell:

$$2\cos 20^\circ = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\cdots}}}}}}$$

$$2\cos 40^\circ = \sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots}}}}}}$$

$$2\cos 80^\circ = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}}}$$

Ezekben a jobb oldalon a 2-esek mögötti műveleti jel hármas ciklusokban ismétlődik. Adósak vagyunk annak igazolásával, hogy a, b, c rendre egyenlő ezekkel:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-a}}}\,; \qquad \sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+b}}}\,; \qquad \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+c}}}\,.$$

Felhasználva a fentiekben igazolt $b = a^2 - 2$, $c = b^2 - 2$, $a = 2 - c^2$ azonosságokat, ezeket kapjuk:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-a}}} &= \sqrt{2+\sqrt{2+c}} = \sqrt{2+b} = a \\
\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+b}}} &= \sqrt{2+\sqrt{2-a}} = \sqrt{2+c} = b \\
\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+c}}} &= \sqrt{2-\sqrt{2+b}} = \sqrt{2-a} = c
\end{aligned}$$

Rámánudzsen élete. Az 1920-ban, 33 éves korában elhunyt Rámánudzsenről csak rossz minőségű fényképek maradtak. Szíves engedélyével inkább *Bérczi Szaniszló* tollrajzát mutatjuk meg, amit több fénykép és egy festmény alapján készített. Sok érdekes életrajzi adat nyerhető a *Wikipédia* szócikkéből, továbbá *Turán P.* és *Sz. G. Gingyikin* hivatkozott munkáiból.

Hivatkozások

Wikipédia: *Srínivásza Rámánudzsan*, 2020.

Turán Pál: *Egy különös életút: Ramanujan, I. és II.*, KöMaL, 1977.

Bérczi Szaniszló: *Tollrajz Rámánudzsen arcáról*, Kézirat, 2020.

Gingyikin, Szemjon Grigorjevics: *Történetek fizikusokról és matematikusokról*, Második, javított kiadás, Typotex, 2004. (*Ramanujan rejtélye* fejezet, Major Péter fordítása)