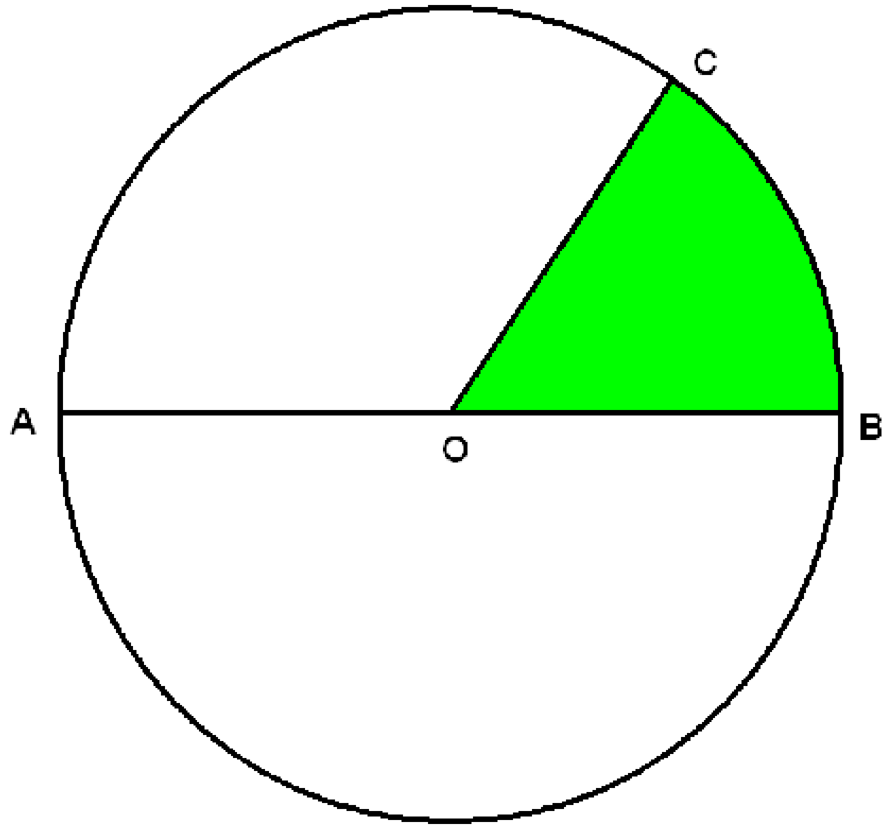
Haladvány Kiadvány 2020.05.20

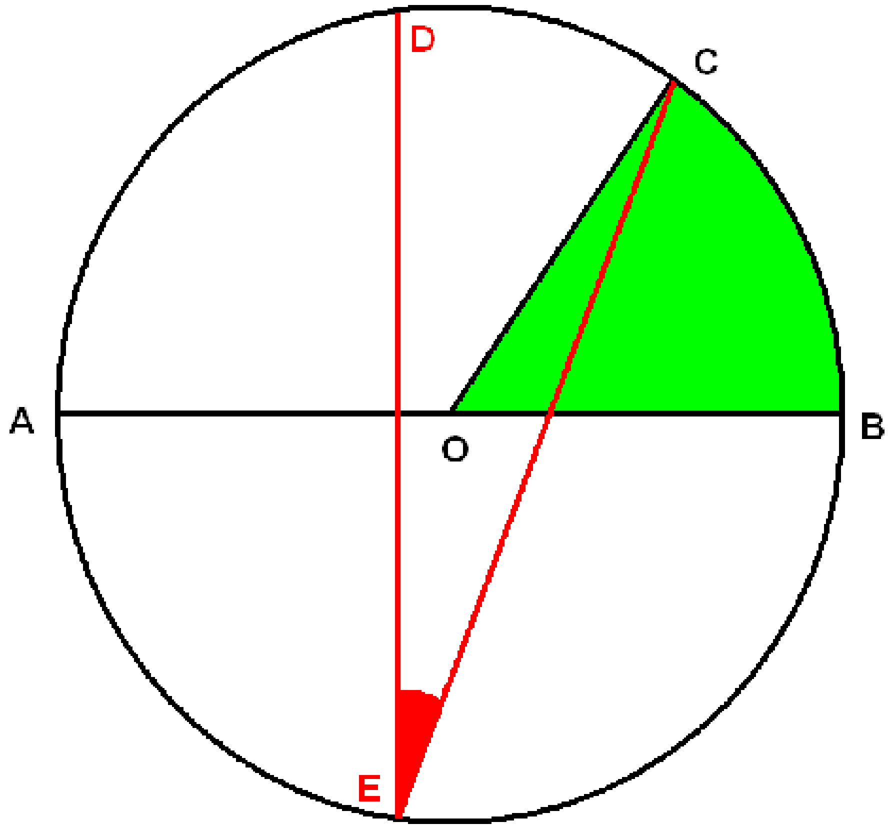
Kísérlet szögek harmadolására

Hujter Mihály és Márkus Péter
hujter.misi@gmail.com és markuspeterfot@gmail.com

Megkíséreljük egy tetszőleges, de 45° és 90° közötti szög harmadolását. Felveszünk egy O középpontú körben egy AB átmérőt, és a pozitív irányú körbejárás szerint értelmezett BA íven egy C pontot úgy, hogy a $BOC\measuredangle$ az inputként megkapott α szög legyen, ahol $\pi < 4\alpha < 2\pi$. (Az első ábrán ez a zöld szögtartomány.) A szögharmadolást úgy fogjuk megkísérelni, hogy keresünk egy olyan, az AB átmérőre merőleges DE húrt, ahol D a CA ív egy belső pontja, E pedig az AB



C
A
O
B


D
C
A
O
B
E

ív egy belső pontja, hogy a húr hossza megegyezzen az EC távolsággal. Jelölje a $CED\measuredangle$ nagyságát β. (A második ábrán ezt látjuk.)

Segédtétel: $2\alpha + 3\beta = 180^\circ$

A segédtétel bizonyítása: Vegyük észre, hogy $OBC\measuredangle = OCB\measuredangle = 90^\circ - \alpha/2$. A kerületi szögek egyenlősége miatt $CBD\measuredangle = \beta$. Ugyancsak a kerületi szögek egyenlősége miatt $DCE\measuredangle = DBE\measuredangle$. Mivel $OB = OC$, ezért $OCB\measuredangle = CBD\measuredangle$. Mivel $EC = ED$, ezért $DCE\ \measuredangle = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. Mivel $DB = EB$, ezért $DBO\measuredangle = \frac{1}{2} \cdot DBO\measuredangle$. Tehát $OCB\measuredangle = CBD\measuredangle = CBD\measuredangle + DBO\measuredangle = \beta + \frac{1}{2}\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = 45^\circ + \frac{3}{4}\beta$. Összeadva az OBC háromszög szögeit, rendre O-nál, B-nél, C-nél: $\alpha + \left(\frac{3}{4}\beta + 45^\circ\right) + \left(\frac{3}{4}\beta + 45^\circ\right) = 180^\circ$. Ebből megkapjuk, hogy $2\alpha + 3\beta = 180^\circ$. ■

Következmény: A D pont helyzetének ismeretében az α szög könnyen harmadolható, hiszen $\frac{2\alpha}{3} = 60^\circ - \beta$. A gond csupán az, hogy a D pont helyzetét megtalálni nem könnyű.

Bizonyos speciális esetekben nem tudjuk megszerkeszteni a D pontot, például $\alpha = 60^\circ$ esetén, hiszen ismert, hogy 20° nem megszerkeszthető euklideszi értelemben. (Ennek a ténynek egy elemi bizonyítása megtalálható az első azon munkájában, melyet az irodalmomjegyzékben feltüntettük.) Ugyanakkor például $\alpha = 54^\circ$ fok esetén meg tudjuk szerkeszteni euklideszi szerkesztéssel a D pontot, hiszen ilyen esetben tudunk a körbe egy olyan szabályos 60-szöget szerkeszteni, melyek csúcsai közt találjuk a B, C, D pontokat. Ugyanez igaz az $\alpha = 72^\circ$ fok esetén is. Természetesen szabályos 60-szögből szerkeszthetünk szabályos 120-szöget is, abból szabályos 240-szöget, és így tovább. Így a D pont megszerkeszthető (azaz az α szög harmadolható) minden olyan esetben is, amikor α egész szám szorzóval való többszöröse a 9° valamely 2-hatványad részének. Például harmadolhatunk $58^\circ 30'$ nagyságú vagy $60^\circ 15'$ nagyságú szögeket.

Rögtön adódik tetszőleges α-ra egy közelítő szögharmadolás: Először megkeressük, a megszerkeszthető $2^\circ 15'$ szögnagyság segítségével, hogy mely n számra igaz az, $n \cdot 2^\circ 15' \leq \alpha < (n+1) \cdot 2^\circ 15'$. Ha itt egyenlőség áll fenn, készen is vagyunk. Ha nem, akkor előbb α helyett az $n \cdot 2^\circ 15'$ szögre megszerkesztjük a D pontot, ezt jelölje D_n, aztán hasonlóan megkapjuk a D_{n+1} pontot is. A D_n és D_{n+1} pontok értelmezéséhez hasonlóan értelmezzük a C_n és C_{n+1} pontokat is, mint a C pont aktuális helyzetét a fix BA íven. Ezután a $D_n D_{n+1}$ szakaszon kiszerkesztünk egy osztópontot $C_n C : C C_{n+1}$ arányos osztás szerint, aztán a kiszerkesztett D^* osztóponton keresztül az AB-re állított merőleges fogja majd megmutatni — de csak közelítőleg — a D és E pontok helyét.

Gyakorlati szempontból bármilyen hasznos is ez az eljárás, de teljesen nem pontos! Az alábbiakban megmutatjuk, hogy például $\alpha = 60^\circ$ esetében mennyire kicsi a hiba. Mivel $26 \cdot 2^\circ 15' = 58^\circ 30' < 60^\circ$ és $27 \cdot 2^\circ 15' = 60^\circ 45' > 60^\circ$, ezért $n = 26$. Egy olyan xy-koordinátarendszerben fogunk számolni, melyben az origó O, a kör sugara az egység, és az AB átmérő egyenese az x-tengely. Most a segédtétel miatt

$$
\begin{aligned}
CED\measuredangle &= \beta = (180^\circ - 2\alpha)/3 = 20^\circ = \frac{\pi}{9} \\
C_{26}E_{26}D_{26}\measuredangle &= \beta_{26} = (180^\circ - 2 \cdot 26 \cdot 2^\circ 15')/3 = 21^\circ = \frac{7\pi}{60} \\
C_{27}E_{27}D_{27}\measuredangle &= \beta_{27} = (180^\circ - 2 \cdot 27 \cdot 2^\circ 15')/3 = 19^\circ 30' = \frac{13\pi}{120}
\end{aligned}
$$

Következésképpen

$$\begin{aligned} BOD\measuredangle &= \alpha + 2\beta = 100^\circ = \frac{5\pi}{9} \\ BOD_{26}\measuredangle &= 26 \cdot 2^\circ 15' + 2 \cdot 21^\circ = 100^\circ 30' = \frac{67\pi}{120} \\ BOD_{27}\measuredangle &= 27 \cdot 2^\circ 15' + 2 \cdot 19^\circ 30' = 99^\circ 45' = \frac{133\pi}{240} \end{aligned}$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned} BOC\measuredangle &= \alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \\ BOC_{26}\measuredangle &= 26 \cdot 2^\circ 15' = 58^\circ 30' = \frac{13\pi}{40} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{120} \\ BOC_{27}\measuredangle &= 27 \cdot 2^\circ 15' = 60^\circ 45' = \frac{27\pi}{80} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{240} \end{aligned}$$

Ennélfogva

$$C_nC : CC_{n+1} = \sin\frac{\pi}{240} : \sin\frac{\pi}{480} = 2\cos\frac{\pi}{480} : 1$$

Most kiindulunk hat jólismert képletből:

$$\begin{aligned} 4\cos\frac{\pi}{3} &= 2 & 4\sin\frac{\pi}{3} &= \sqrt{12} \\ 4\cos\frac{\pi}{5} &= 1+\sqrt{5} & 4\sin\frac{\pi}{5} &= \sqrt{10-\sqrt{20}} \\ 4\left|\cos\frac{x}{2}\right| &= \sqrt{8+8\cos x} & 4\left|\sin\frac{x}{2}\right| &= \sqrt{8-8\cos x} \end{aligned}$$

Az addiciós képletek szerint megkapjuk ezt:

$$\begin{aligned}
8\cos\frac{2\pi}{15} &= \frac{1}{2}\cdot 16\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(4\cos\frac{\pi}{3}\right)\left(4\cos\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(4\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(4\sin\frac{\pi}{3}\right)\\
&= 1+\sqrt{5}+\sqrt{30-\sqrt{180}}
\end{aligned}$$

Következésképpen

$$\begin{aligned}
4\cos\frac{\pi}{15} &= \sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-\sqrt{180}}}\\
4\sin\frac{\pi}{15} &= \sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-\sqrt{180}}}
\end{aligned}$$

$$4\cos\frac{\pi}{30} = \sqrt{8+2\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-\sqrt{180}}}}$$

$$4\sin\frac{\pi}{30} = \sqrt{8-2\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-\sqrt{180}}}}$$

$$4\cos\frac{\pi}{60} = \sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-\sqrt{180}}}}}$$

$$4\sin\frac{\pi}{60} = \sqrt{8-2\sqrt{8+2\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-\sqrt{180}}}}}$$

$$4\cos\frac{\pi}{120} = \sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-\sqrt{180}}}}}}$$

$$4\sin\frac{\pi}{120} = \sqrt{8-2\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-\sqrt{180}}}}}}$$

$$4\cos\frac{\pi}{240} = \sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-\sqrt{180}}}}}}}$$

$$4\sin\frac{\pi}{240} = \sqrt{8-2\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-\sqrt{180}}}}}}}$$

$$4\cos\frac{\pi}{480}$$

$$= \sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-\sqrt{180}}}}}}}}$$

$$4\sin\frac{\pi}{480}$$

$$= \sqrt{8-2\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-\sqrt{180}}}}}}}}$$

Ezekből a képletekből és a trigonometrikus addíciós formulákból megkapjuk —

10^{-15}-nél jóval kisebb hibával számolva —, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+2\cos\frac{\pi}{480}} &= 0.33333809303149 \\
\cos\frac{67\pi}{120} &= -0.1822355254921474566 \\
\cos\frac{133\pi}{240} &= -0.1693495038490246142
\end{aligned}$$

Most már — nagyon jó közelítéssel — kiszámíthatjuk a D^* osztópontnak az AB-re merőleges átmérőtől való távolságát:

$$\begin{aligned}
& 0.33333809303149 \cdot 0.1822355254921474566 \\
& +(1-0.33333809303149) \cdot 0.1693495038490246142 \\
= \; & 0.1736449057303057
\end{aligned}$$

Ha a D^* pont pontosan a DE egyenesre esne, akkor ennek a távolságnak pontosan $-\cos 100^\circ = \sin 10^\circ$ nagyságúnak kellene lenni. Tekintve, hogy $0.5 =$

$\sin 30^\circ = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ$, és hogy

$$\begin{aligned} 3\cdot 0.173646 - 4\cdot 0.173646^3 &= 0.4999994 \\ 3\cdot 0.173647 - 4\cdot 0.173647^3 &\approx 0.5000031 \end{aligned}$$

megállapíthatjuk, hogy a D^* osztópont távolsága az AB-re merőleges átmérőtől 5 értékes jegyre pontos!

Hivatkozások:

Hujter M. és Márkus P.: *Jutunk-e hatról ötre szögharmadolásban?*
Haladvány Kiadvány 2019-05-25
`https://math.bme.hu/~hujter/190525.pdf`

Hujter M.: *Három érdekes, de nem megszerkeszthető szám,*
Haladvány Kiadvány 2020-02-02
`https://math.bme.hu/~hujter/200202.pdf`