Haladvány Kiadvány 2020.05.29

Harmadolható szögekről

Hujter Mihály és Márkus Péter
hujter.misi@gmail.com és markuspeterfot@gmail.com

Ismeretes, hogy euklideszi szerkesztéssel harmadolható a $\frac{\pi}{10}$ nagyságú (tehát 18°-os) szög, de nem harmadolható a $\frac{\pi}{12}$ nagyságú (tehát 15°-os) szög. Itt mi most megmutatjuk, hogy a $\frac{\pi}{11}$ nagyságú szög is harmadolható, sőt általánosabban bizonyítjuk, hogy ha adottak olyan A, B, C nemnegatív egész számok, melyekre $B + C = 9$ és $2A + B + 1$ osztható 9-cel, akkor egy olyan adott α hegyesszög, melynek nagysága fokokban kifejezve pontosan $A.BCBC\ldots$ (tehát olyan szakaszos tizedes tört, ahol az ismétlődő szakasz BC), euklideszi szerkesztéssel harmadolható. (Fokokban kifejezve $\frac{\pi}{11}$ pontos értéke: 16.3636..., ezért ennek a számjegyeire is teljesülnek a felsorolt feltételek.)

Ebben a dolgozatban bizonyos adott α hegyesszögeket szándékozunk harmadolni a szokásos euklideszi szerkesztésekkel. Ismeretes, hogy 9°-ot egész számszor véve olyan szögeket nyerünk, melyeket tudunk harmadolni, mert 3° többszöröseit meg tudjuk szerkeszteni. Mivel szöget felezni is tudunk, ezért természetesen $4^\circ 30'$ egész számszorosait is tudjuk harmadolni, sőt $2^\circ 15'$ egész számszorosait is. Ebből következően $k = 1, 2, 3$ és $n = 0, 1, 2, \ldots, 9$ esetén tudjuk harmadolni mindazokat az a hegyesszögeket, melyek fokokban kifejezve felírhatók $9n + \frac{9k}{4}$ alakban. Ezek között például tudjuk harmadolni a $60^\circ 45'$-es szöget (hiszen $9 \cdot 6 + \frac{9 \cdot 3}{4} = 60.75$). Nem ismeretes azonban egyetlen olyan $0 \leq m < 45$ egész szám sem, melyre a 60° plusz m ívperces szöget harmadolni tudnánk. Érdekes módon az alábbiakból kiderül, hogy olyan szöget viszont tudunk harmadolni, melynek a nagysága teljes pontossággal 60.5454... fok, ahol tehát a szakaszos tizedes tört szakasza: 54. Ez a szög fokokban és ívpercekben kifejezve: $60^\circ 32.7272\ldots'$.

Jelöljön A, B, C olyan nemnegatív egész számokat, melyekre $A \leq 89$, $B+C = 9$ és $2A + B + 1$ osztható 9-cel.Jelölje a $(2A + B + 1)/9$ egész számot D. Tehát $B + C = 9$ és $2A + B + 1 = 9D$ miatt $B = 9 - C$ és $2A = C + 9D - 10$. Vegyük észre, hogy fokokban számolva

$$\begin{aligned}
\alpha &= A.BCBC... \\
&= A + \frac{B}{10} + \frac{C}{10^2} + \frac{B}{10^3} + \frac{C}{10^4} + \frac{B}{10^5} + \frac{C}{10^6} + \cdots \\
&= A + \frac{10B + C}{99} = \frac{9}{22}(C + 11D - 10)
\end{aligned}$$

Következésképpen

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{3} &= \frac{22}{3}\alpha - 7\alpha = \frac{22}{3}\cdot\frac{9}{22}\left(C + 11D - 10\right) - 7\alpha \\ &= 3\left(C + 11D - 10\right) - 7\alpha\end{aligned}$$

Mivel ismert, hogy 3° szerkeszthető, ezért a fenti képlet jobb oldala is. Nyertünk tehát egy euklideszi szerkesztést az α szög harmadára. Bizonyítottuk tehát az alábbi tételt:

Tétel. *A fenti feltételek teljesülése esetén az $A.BCBC\ldots$ fokos szög euklideszi szerkesztéssel harmadolható.*

A fent említett $60^\circ 32.7272\ldots'$ nagyságú, azaz $60.5454\ldots$ fokos szögre is alkalmazható a tétel, mert $2\cdot 60 + 5 + 1 = 126 = 9\cdot 14$.

Hivatkozások:

Hujter M. és Márkus P.: *Jutunk-e hatról ötre szögharmadolásban?*, Haladvány Kiadvány 2019-05-25
`https://math.bme.hu/~hujter/190525.pdf`

Hujter M.: *Három érdekes, de nem megszerkeszthető szám*, Haladvány Kiadvány 2020-02-02
`https://math.bme.hu/~hujter/200202.pdf`

Hujter M. és Márkus P.: *Kísérlet szögek harmadolására*, Haladvány Kiadvány 2020-05-20
`https://math.bme.hu/~hujter/200520.pdf`