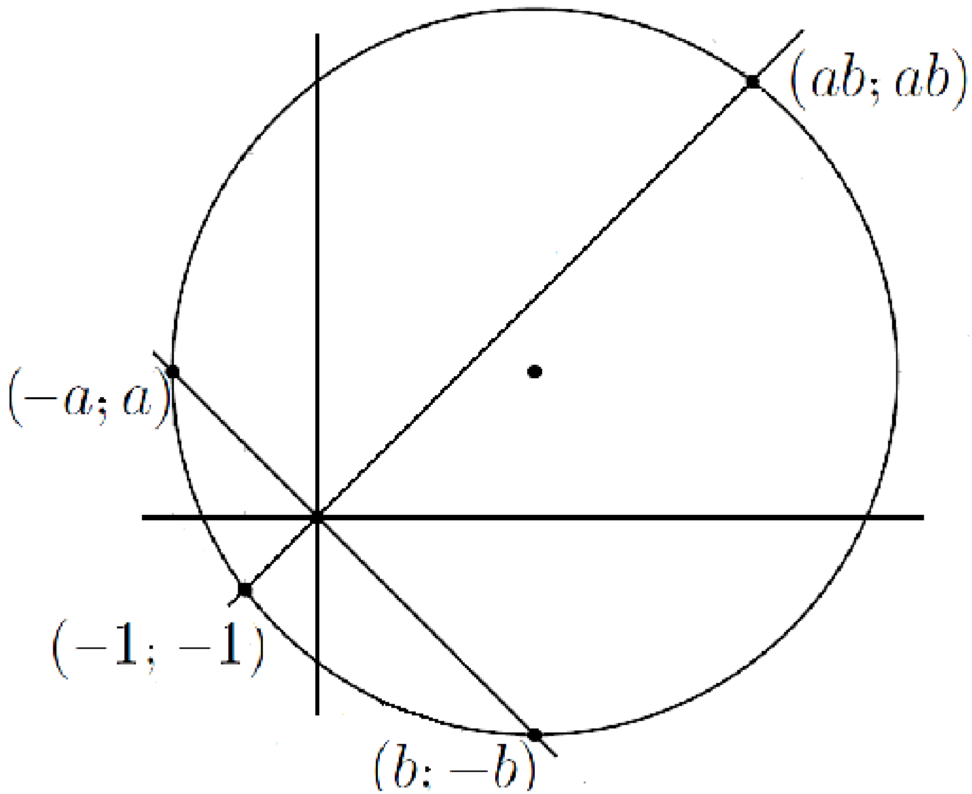
Haladvány Kiadvány 2020.06.11

Két tétel négy pontról gyors algebrai bizonyításokkal

Hujter Mihály
hujter.misi@gmail.com

Legyenek a, b tetszőleges pozitív számok. Először igazoljuk következőt: *A* $(-a; a)$, $(-1; -1)$ *és* $(b; -b)$ *pontokon átmenő kör átmegy az* $(ab; ab)$ *ponton is*.

Jelölje a pontokat a fenti felsorolási sorrendben: $P_1, \ldots, P_4$. Mármost P_1, P_2, P_3 körét a következőképpen kapjuk: Mivel



$(ab; ab)$
$(-a; a)$
$(-1; -1)$
$(b; -b)$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{(a+1)(b-1)}{2}+a\right)^2+\left(\frac{(a-1)(b+1)}{2}-a\right)^2 &= \frac{(a^2+1)(b^2+1)}{2}\,,\\
\left(\frac{(a+1)(b-1)}{2}+1\right)^2+\left(\frac{(a-1)(b+1)}{2}+1\right)^2 &= \frac{(a^2+1)(b^2+1)}{2}\,,\\
\left(\frac{(a+1)(b-1)}{2}-b\right)^2+\left(\frac{(a-1)(b+1)}{2}+b\right)^2 &= \frac{(a^2+1)(b^2+1)}{2}\,,
\end{aligned}
$$

ezért a kör sugara $\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)/2}$, a középpont x- illetve y-koordinátája pedig $(a+1)(b-1)/2$ illetve $(a-1)(b+1)/2$. Mivel

$$
\left(\frac{(a+1)(b-1)}{2}-ab\right)^2+\left(\frac{(a-1)(b+1)}{2}-ab\right)^2=\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{2}\,,
$$

ezért P_4 is rajt van a körön. ■

A húrnégyszögünk átlói az origóban metszik egymást. Nyilván minden olyan húrnégyszög, melynek átlói merőlegesek egymásra, koordinátázható a fenti módon: Az átlók metszéspontja lesz az origó, a metszéspont és egy teszőleges kiválasztott csúcs távolsága pedig $\sqrt{2}$ egységnyinek vehető, így a kiszemelt csúcs P_2-nek tekinthető. A fenti tétel miatt alkalmas a, b pozitív számokkal a maradék három csúcs a fenti P_3, P_4, P_1 pontokkal azonosítható. Az átlók merőlegességéből következik, hogy a kör középpontja a négyszög belsejében van (hiszen mindegyik oldalhoz tartozó kerületi szög egy-egy derekszögű háromszög hegyesszöge).

A második tételünk: *Egy olyan húrnégyszögben, melynek átlói merőlegesek, bármely oldal hossza plusz kétszer a szemközti oldal felezőpontjának távolsága a hozzá tartozó körívtől éppen a kör átmérőjével egyezik meg*.

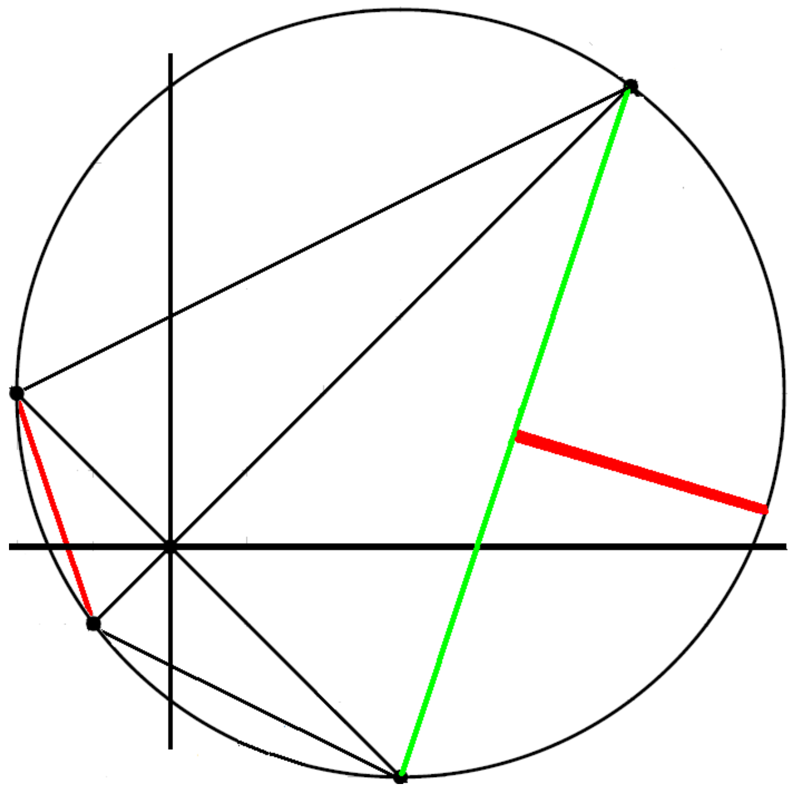
Tekintve az átlók alkotta derékszögű háromszögekre vonathozó Thálesz-tételt, a fenti tétel így is átfogalmazható: *Egy olyan húrnégyszögben, melynek átlói merőlegesek, bármely oldal felezőpontjának távolsága az átlók metszéspontjától megegyezik a szemközti oldalnak a körközéppontól mért távolságával.*

A fent megbeszélt szimmetria-tulajdonságok miatt a tételt elegendő a P_1P_2 oldalra bizonyítani. Ennek hossza:

$$\sqrt{(-a-(-1))^2+(a-(-1))^2}=\sqrt{2\left(a^2+1\right)}$$

A szemközti oldalnak és a kör középpontjának távolsága:

$$\sqrt{\left(\frac{b+ab}{2}-\frac{(a+1)(b-1)}{2}\right)^2+\left(\frac{-b+ab}{2}-\frac{(a-1)(b+1)}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+1}{2}}$$



Tehát a szemközti oldal középpontjának a hozzá tartozó ív felezőpontjától mért távolsága:

$$\sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{2}} - \sqrt{\frac{a^2+1}{2}}$$

Mármost

$$\sqrt{2\left(a^2+1\right)} + 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{2}} - \sqrt{\frac{a^2+1}{2}}\right) = \sqrt{2(a^2+1)(b^2+1)}$$

Ez pedig valóban a kör átmérője. ■