Polinomok és vetületek mátrixokkal

dr. Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém,
SZALKAI@ALMOS.UNI-PANNON.HU

2020.08.16.

Kivonat

Számítógépes számítások során gyakran érdemes a mátrix-vektor szorzásokat használni, erre mutatunk két példát.

Köszönjük az NKFI Alap 2018-1.3.1-VKE-2018-00048. sz. támogatását.

HALADVANY-KIADVANY, 2020.08.16.
http://www.math.bme.hu/~hujter/halad

[CR 2013] és [T 2018] -ben, számítógépes képfeldolgozás céljára *minden* számítást $\mathbf{Mx}$ alakban végeznek, ahol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ az input adat-vektor és $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ egy megfelelő mátrix. [T 2018] több meghökkentő állítást is közöl a fenti formában (bizonyítás nélkül). Ezen állítások igazolása ugyan nem túl nehéz, de az Olvasó szürkeállományának felesleges megterhelésének elkerülése végett jelen cikkben részletesen elemezzük őket.

1. Polinomok

[T 2018] 66. oldalán a (4.7), (4.8) képletekben a következőt találjuk (bizonyítás nélkül). Tekintsük a

$$f\left(x,y\right)=\sum_{i=0}^{d_x}\sum_{j=0}^{d_y} c_{i,j}x^i y^j \tag{1}$$

tetszőleges kétváltozós polinomot, ahol x és y csak korlátos *egész* számok lehetnek $(1 \le x \le w,\, 1 \le y \le h)$, $c_{i,j} \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós számok, és $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{w\times h}$ a következő eredmény-mátrix:

$$\mathbf{z}\left[x,y\right] := f\left(x,y\right) \quad . \tag{2}$$

Ha $\mathbf{z}$ -t sorfolytonosan olvasva *azonosítjuk* a $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^u$ oszlopvektorral $(u = wh)$, akkor található olyan $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{u\times v}$ mátrix, amelyre $v = \left(d_x+1\right)\left(d_y+1\right)$ és

$$\mathbf{z} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{c} \quad . \tag{3}$$

Bizonyítás (konstrukció): Nyilván $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^v$ a következő vektor:

$$\mathbf{c} = \left[c_{0,0}\ ,\ c_{1,0}\ ,\ c_{0,1}\ ,\ c_{1,1}\ ,\ c_{2,0}\ ,\ c_{0,2}\ ,\ \dots\ ,\ c_{d_x,d_y}\right]^T \tag{4}$$

és az $\mathbf{F}$ mátrix:

$$\mathbf{F} = \left[\mathbf{1},\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{xy},\mathbf{x}^2,\mathbf{y}^2,\dots,\mathbf{x}^{d_x}\mathbf{y}^{d_y}\right] \in \mathbb{R}^{u\times v} \tag{5}$$

ahol bármely $0 \le i \le d_x$, $0 \le j \le d_y$ esetén

$$\mathbf{x}^i\mathbf{y}^j := \left(x^i\cdot y^j\right)^T_{1\le x\le w,\ 1\le y\le h} \in \mathbb{R}^u \tag{6}$$

a következő vektor: az $1 \le x \le w,\, 1 \le y \le h$ feltételeket eleget tevő összes (x,y) számpárt sorfolytonosan olvasva az $x^i \cdot y^j$ értékeket írjuk le egymás után. Nyilván $\mathbf{1} = \mathbf{x}^0\mathbf{y}^0$. $\square$

Például: $w = 3$ és $h = 2$ esetén

$$\mathbf{z} = \begin{array}{|c|c|}\hline f\left(1,1\right) & f\left(1,2\right) \\ \hline f\left(2,1\right) & f\left(2,2\right) \\ \hline f\left(3,1\right) & f\left(3,2\right) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline f\left(1,1\right) \\ \hline f\left(1,2\right) \\ \hline f\left(2,1\right) \\ \hline f\left(2,2\right) \\ \hline f\left(3,1\right) \\ \hline f\left(3,2\right) \\ \hline \end{array} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{c} =$$

$$= \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1\cdot 1} & \boxed{1^2} & \boxed{1^2} & & \boxed{1^{d_x}\cdot 1^{d_y}} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1\cdot 2} & \boxed{1^2} & \boxed{2^2} & & \boxed{1^{d_x}\cdot 2^{d_y}} \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{2\cdot 1} & \boxed{2^2} & \boxed{1^2} & \cdots & \boxed{2^{d_x}\cdot 1^{d_y}} \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{2\cdot 2} & \boxed{2^2} & \boxed{2^2} & & \boxed{2^{d_x}\cdot 2^{d_y}} \\ \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{3\cdot 1} & \boxed{3^2} & \boxed{1^2} & & \boxed{3^{d_x}\cdot 1^{d_y}} \\ \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{3\cdot 2} & \boxed{3^2} & \boxed{2^2} & & \boxed{3^{d_x}\cdot 2^{d_y}} \end{bmatrix} \cdot \left[c_{0,0}\ , c_{1,0}\ , c_{0,1}\ , c_{1,1}\ , c_{2,0}\ , c_{0,2}\ , ..., c_{d_x,d_y}\right],$$

nyilván **F** -ben és **c** -ben a sorrend tetszőleges, de *ugyanannak* kell lennie !

Tehát, ha például $f(x,y) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}x - \frac{3}{7}y + 7xy + 9x^2y$, azaz $d_x = 2$ és $d_y = 1$,

akkor $v = (d_x+1)(d_y+1) = 3\cdot 2 = 6$, $\mathbf{c} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{-3}{7}, 7, 0, 9,\right]^T$,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1\cdot 1} & \boxed{1^2} & \boxed{1^2\cdot 1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1\cdot 2} & \boxed{1^2} & \boxed{1^2\cdot 2} \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{2\cdot 1} & \boxed{2^2} & \boxed{2^2\cdot 1} \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{2\cdot 2} & \boxed{2^2} & \boxed{2^2\cdot 2} \\ \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{3\cdot 1} & \boxed{3^2} & \boxed{3^2\cdot 1} \\ \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{3\cdot 2} & \boxed{3^2} & \boxed{3^2\cdot 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{4} \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{4} & \boxed{8} \\ \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{9} & \boxed{9} \\ \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{6} & \boxed{9} & \boxed{18} \end{bmatrix}$$

és végül

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 9 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 9 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^1/_3 \\ {}^2/_5 \\ {}^{-3}/_7 \\ 7 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{1712}/_{105} \\ {}^{3347}/_{105} \\ {}^{5324}/_{105} \\ {}^{10\,529}/_{105} \\ {}^{10\,826}/_{105} \\ {}^{21\,491}/_{105} \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzés:

$$f(1,1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}\cdot 1 - \frac{3}{7}\cdot 1 + 7\cdot 1\cdot 1 + 9\cdot 1^2\cdot 1 = \frac{1712}{105}$$

$$f(1,2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}\cdot 1 - \frac{3}{7}\cdot 2 + 7\cdot 1\cdot 2 + 9\cdot 1^2\cdot 2 = \frac{3347}{105}$$

$$f(2,1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}\cdot 2 - \frac{3}{7}\cdot 1 + 7\cdot 2\cdot 1 + 9\cdot 2^2\cdot 1 = \frac{5324}{105}$$

$$f(2,2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot 2 - \frac{3}{7} \cdot 2 + 7 \cdot 2 \cdot 2 + 9 \cdot 2^2 \cdot 2 = \tfrac{10\,529}{105}$$
$$f(3,1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot 3 - \frac{3}{7} \cdot 1 + 7 \cdot 3 \cdot 1 + 9 \cdot 3^2 \cdot 1 = \tfrac{10\,826}{105}$$
$$f(3,2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot 3 - \frac{3}{7} \cdot 2 + 7 \cdot 3 \cdot 2 + 9 \cdot 3^2 \cdot 2 = \tfrac{21\,491}{105} \qquad \textbf{OK}.$$

2. Vetületek

Közismert egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektor merőleges vetítése egy tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^n$ vektorhalmaz által kifeszített hiper-altérre és annak merőleges kiegészítőjére, és a Legjobb Approximáció Tétele.

Ki lehet deríteni, hogy [T 2018] 73-75 oldalak, 4.3.1-4.3.1 alfejezetekben ezt csinálja $\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}$ és $\mathbf{M}^{\perp} \cdot \mathbf{x}$ formában, de nem mondja ki világosan. [H 1997] 12.§ Projections and Projection Matrices fejezet 161-177 oldalain ugyan részletesen leírja az elméletet, de nekünk szokatlan terminológiája ("minden mátrix") miatt nehezen érthető.

Ezért most a nálunk megszokott jelölésekkel és fogalmakkal keressük meg az $\mathbf{M}$ és $\mathbf{M}^{\perp}$ mátrixokat.

A fejezet végén néhány további megjegyzést teszünk és egy részletes példát mutatunk.

Jelölések a cikk rövidítése végett:

- egy mátrixot *egyelőre* azonosítunk az oszlopvektorainak halmazával *és* a vektorok által kifeszített hiper-altérrel (generátum),

- a vektorokat nem mindig húzzuk alá, néha félkövér betűvel jelöljük, általában oszlopvektorokra gondolunk, tehát $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)^T$,

- $(\ )^T$ a transzponálás jele.

Tehát adott $H = \{\mathbf{h}_1, ..., \mathbf{h}_k\} = \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $\mathbf{h}_i \in \mathbb{R}^n$, és feladatunk a $\mathbf{H}$ és a $\mathbf{H}^{\perp}$ terekbe való (merőleges) vetítés kifejezése

$$\mathbf{x_H} := \mathbf{M_H} \cdot \mathbf{x} \in \mathbf{H} \tag{7}$$

és

$$\mathbf{x_{H^{\perp}}} := \mathbf{M_H^{\perp}} \cdot \mathbf{x} \in \mathbf{H}^{\perp} \tag{8}$$

alakban ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$), azaz keresendők az $\mathbf{M_H}$ és $\mathbf{M_H^\perp}$ mátrixok.

Feltesszük még, hogy a $\{\mathbf{h}_1, ..., \mathbf{h}_k\}$ vektorok *lineárisan függetlenek* (vagyis $\mathbf{H}$ teljes rangú).

Jól ismert, hogy

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_H} + \mathbf{x_{H^\perp}} \tag{9}$$

ahol valamilyen $\overrightarrow{\alpha} := (\alpha_1, ..., \alpha_k)^T$ *oszlopvektorra*

$$\mathbf{x_H} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{h}_i = \mathbf{H} \cdot \overrightarrow{\alpha} \ , \tag{10}$$

és $\mathbf{x_{H^\perp}} = \mathbf{x} - \mathbf{x_H}$ merőleges $\mathbf{H}$ összes elemére, vagyis *minden* $j = 1, ..., k$ index esetén

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{x_H} \ , \ \mathbf{h}_j \rangle = 0 \tag{11}$$

azaz

$$\langle \mathbf{x} \ , \ \mathbf{h}_j \rangle - \langle \mathbf{x_H} \ , \ \mathbf{h}_j \rangle = 0 \tag{12}$$

vagyis

$$\forall j \qquad \langle \mathbf{x} \ , \ \mathbf{h}_j \rangle = \langle \mathbf{x_H} \ , \ \mathbf{h}_j \rangle \quad . \tag{13}$$

Ezeket a számokat ($1 \leq j \leq k$) *oszlopvektorba* rendezve *egyrészt*

$$[\langle \mathbf{x} \ , \ \mathbf{h}_j \rangle]_{j=1}^k = [\langle \mathbf{h}_j \ , \ \mathbf{x} \rangle]_{j=1}^k = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{h}_1^T \ , \ \mathbf{x} \rangle \\ ... \\ \langle \mathbf{h}_k^T \ , \ \mathbf{x} \rangle \end{bmatrix} = \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{x} \tag{14}$$

($\mathbf{H}^T$ a $\mathbf{H}$ transzponáltja), *másrészt*, (10) és $\langle \ , \ \rangle$ szimmetriája alapján

$$\langle \mathbf{x_H} \ , \ \mathbf{h}_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \langle \mathbf{h}_i \ , \ \mathbf{h}_j \rangle = \left[\left\langle \mathbf{h}_j^T, \mathbf{h}_1 \right\rangle, ..., \left\langle \mathbf{h}_j^T, \mathbf{h}_k \right\rangle \right] \cdot \overrightarrow{\alpha} = \mathbf{h}_j^T \cdot \mathbf{H} \cdot \overrightarrow{\alpha} \tag{15}$$

tehát

$$[\langle \mathbf{x_H} \ , \ \mathbf{h}_j \rangle]_{j=1}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^T \cdot \mathbf{H} \cdot \overrightarrow{\alpha} \\ ... \\ \mathbf{h}_k^T \cdot \mathbf{H} \cdot \overrightarrow{\alpha} \end{bmatrix} = \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \overrightarrow{\alpha} \ . \tag{16}$$

Tehát

$$\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \overrightarrow{\alpha} \ , \tag{17}$$

ahonnan kapjuk, *feltéve*, hogy $\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H} = [\langle \mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j \rangle]$ egy *invertálható mátrix*

$$\left(\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H}\right)^{-1} \cdot \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{x} = \overrightarrow{\alpha} \tag{18}$$

és (10) alapján

$$\mathbf{x_H} = \mathbf{H} \cdot \left(\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H}\right)^{-1} \cdot \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{x} \ , \tag{19}$$

tehát a keresett mátrix

$$\boxed{\mathbf{M_H} = \mathbf{H} \cdot \left(\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H}\right)^{-1} \cdot \mathbf{H}^T} \ \in \mathbb{R}^{n \times n}, \tag{20}$$

és természetesen

$$\mathbf{x}_{\mathbf{H}^\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x_H} = (\mathbf{I} - \mathbf{M_H}) \cdot \mathbf{x} \tag{21}$$

vagyis

$$\boxed{\mathbf{M}_\mathbf{H}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{M_H}} \tag{22}$$

ahol $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ az egységmátrix. $\square$

2.1. További megjegyzések

Az alábbi észrevételek nyilvánvalóak, vagy a definíciókból vagy a (20) és (22) képletekből következnek.

i) $\mathbf{M_H}$ és $\mathbf{M}_\mathbf{H}^\perp$ szimmetrikus mátrixok.

ii) $\mathbf{M_H}$ és $\mathbf{M}_\mathbf{H}^\perp$ sajátértékei 1 és 0 , a sajátalterek $\mathbf{H}$ és $\mathbf{H}^\perp$ ("felváltva").

iii) Válasszunk $\mathbf{H}^\perp$ -ben egy ortonormált bázist: $\{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_\ell\} \subset \mathbf{H}^\perp$, és legyen $\mathbf{V} = [\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_\ell] \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ ezen oszlopvektorokból képzett mátrix **(**[CR 2013]-ben $\mathbf{W} = \mathbf{V}^T$**)**, ahol $\ell = n - k = \dim\left(\mathbf{H}^\perp\right)$. Ekkor

$$\mathbf{V}^T\mathbf{H} = \mathbf{0} \ , \qquad \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}_\ell \ , \qquad \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{M}_\mathbf{H}^\perp \tag{23}$$

és bármely $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$\left\|\mathbf{M}_\mathbf{H}^\perp \cdot \mathbf{z}\right\|_{\mathbb{R}^n} = \left\|\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{z}\right\|_{\mathbb{R}^\ell} \ . \tag{24}$$

iv) Bármely $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{H}$ (mint altér) és $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{a}$ vektorok esetén

$$\mathbf{M}_\mathbf{H}^\perp \cdot \mathbf{z} = \mathbf{M}_\mathbf{H}^\perp \cdot \mathbf{a} \ . \tag{25}$$

Ezen utóbbi egyszerű összefüggésnek a képfeldolgozásban és általában a hibakeresésben van jelentősége: ha a hibamentes adat (kép) $\boldsymbol{\mu}$, amelyet egy $\mathbf{a}$ hiba (*anomália*) torzít, akkor a keletkezett hibás adat, vagyis a $\mathbf{z} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{a}$ eltérését a (25) kifejezés adja meg. Lásd még a következő példa $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ vektorait és a (24) szerinti méretek eltéréseit.

2.2. Egy példa

Legyen $\mathbf{H} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^5$, azaz $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 2}$,

torzítatlan adatok:

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \mathbf{H} \cdot \mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 14 & 19 & 24 \end{bmatrix}^T,$$

$$\boldsymbol{\mu}_2 = \mathbf{H} \cdot \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 13 & 17 & 21 \end{bmatrix}^T,$$

$$\boldsymbol{\mu}_3 = \mathbf{H} \cdot \mathbf{s}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}^T,$$

torzított mérések és anomáliák:

$$\mathbf{z}_1 = \boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 14 & 19 & 24 \end{bmatrix}^T + \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 14 & 19 & 24 \end{bmatrix}^T ,$$

$$\|\mathbf{a}_1\|^2 = 0 \ , \tag{26}$$

$$\mathbf{z}_2 = \boldsymbol{\mu}_2 + \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 13 & 17 & 21 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 16 & 18 & 20 \end{bmatrix}^T,$$

$$\|\mathbf{a}_2\|^2 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2 + (-1)^2 = \underline{13} \ , \tag{27}$$

$$\mathbf{z}_3 = \boldsymbol{\mu}_3 + \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 11 & 10 & 17 & 18 \end{bmatrix}^T.$$

$$\|\mathbf{a}_3\|^2 = 0^2 + 2^2 + (-2)^2 + 2^2 + 0^2 = \underline{12}, \tag{28}$$

$$\mathbf{M_H} = \mathbf{H} \cdot \left(\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H}\right)^{-1} \cdot \mathbf{H}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

és $\quad \mathbf{M}_{\mathbf{H}}^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{M_H} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 & 0 & 2 \\ -4 & 7 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 8 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 7 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & 4 \end{bmatrix},$$

Ekkor

$$\mathbf{M}_{\mathbf{H}}^{\perp} \cdot \mathbf{z}_2 = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 & 0 & 2 \\ -4 & 7 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 8 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 7 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 16 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 10 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\left\|\mathbf{M}_{\mathbf{H}}^{\perp} \cdot \mathbf{z}_2\right\|^2 = \left\|\mathbf{M}_{\mathbf{H}}^{\perp} \cdot \mathbf{a}_2\right\|^2 = \frac{1}{25} \cdot \left((-4)^2 + (-2)^2 + 10^2 + 2^2 + (-6)^2\right) = \frac{32}{5} = \underline{6.4}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{H}}^{\perp} \cdot \mathbf{z}_3 = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 & 0 & 2 \\ -4 & 7 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 8 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 7 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 10 \\ 17 \\ 18 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ -12 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\left\|\mathbf{M}_{\mathbf{H}}^{\perp} \cdot \mathbf{z}_3\right\|^2 = \left\|\mathbf{M}_{\mathbf{H}}^{\perp} \cdot \mathbf{a}_3\right\|^2 = \frac{1}{25}\left((-2)^2 + 8^2 + (-12)^2 + 8^2 + (-2)^2\right) = \frac{56}{5} = \underline{11.2} \quad .$$

A következőket figyelhetjük meg: bár a torzítást okozó $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ nagyjából ugyanolyan méretűek (lásd (27) és (28)), a keletkezett, torzított adatok az elvárt ($\mathbf{H}$ -beli) értékektől már különbözőképpen térnek el: $\left\|\mathbf{M}_{\mathbf{H}}^{\perp} \cdot \mathbf{z}_3\right\|^2$ majdnem kétszer akkora, mint $\left\|\mathbf{M}_{\mathbf{H}}^{\perp} \cdot \mathbf{z}_2\right\|^2$. Ennek az oka az, hogy $\mathbf{a}_2$ kevésbé tér el a $\mathbf{H}$ altértől (elvárt értékek halmazától), mint $\mathbf{a}_3$.

Természetesen a gyakorlatban csak a $\mathbf{z}_i$ értéket ismerjük (mérjük), és a fentiek szerint számoljuk ki a lehetséges, eredeti $\mathbf{M}_{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{z}_i \in \mathbf{H}$ és az eltérést mérő $\left\|\mathbf{M}_{\mathbf{H}}^{\perp} \cdot \mathbf{z}_i\right\|$ értékeket.

3. Hivatkozások

[CR 2013] Cogranne,R., Retraint,F.: *Statistical detection of defects in radiographic images using an adaptive parametric model*, Signal Processing, vol. 96, no. Part B, pp. 173-189, 2014.
http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168413003599
https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2013.09.016

[H 1997] Harville,D.A.: *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*, Springer: Berlin, 1997.

[T 2018] Tout,K.: *Automatic vision system for surface inspection and monitoring: Application to wheel inspection*, These, L'Univertité de Technologie de Troyes, 2018.