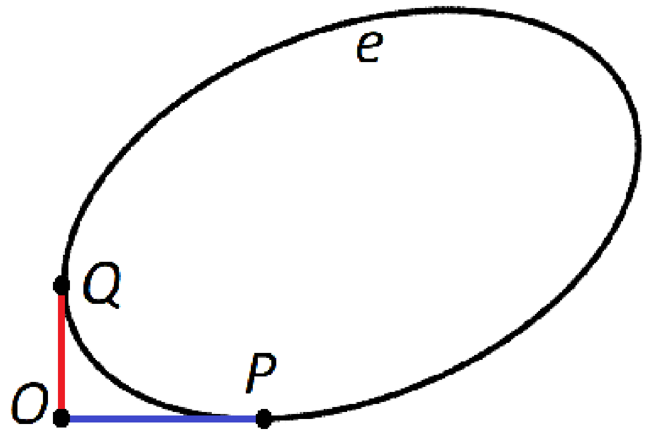
Haladvány Kiadvány 2020-12-26

Az ellipszis szimmetriájáról

Hujter M. hujter.misi@gmail.com

Összefoglaló

Egy, az ellipszis érintőire vonatkozó szimmetria-tulajdonságot fogunk bizonyítani.



Az ellipszis merőleges érintői

Tekintsünk egy tetszőleges e ellipszist a síkon, és rajta kívül egy O pontot. Húzzuk be O-ból mindkét érintőt az ellipszishez; az érintési pontokat jelölje P és Q. Tekintsük a következő három állítást:

(1) $\overline{OP} = \overline{OQ}$.

(2) $POQ\measuredangle = 90^\circ$

(3) O rajta van az e ellipszis valamelyik szimmetriatengelyén.

Az világos, hogy (3) $\Longrightarrow$ (1). Az is világos, hogy az ellipszis középpontjából induló, az ellipszis bármely szimmetriatengelyén haladó félegyenesen egyértelmű helyen található olyan O pont, melyre fennáll (2), és nyilván fennáll (1) is.

Állítás: (1) $\wedge$ (2) $\Rightarrow$ (3)

Bizonyítás: Vegyünk fel úgy egy derékszögű xy-koordinátarendszert, hogy O legyen azonos az origóval, a P pont az $(1;0)$ ponttal, a Q pont pedig a $(0;1)$ ponttal. Ismeretes — például a Wikipédia szerint is —, hogy az ellipszis egyenlete a következő alakú:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Itt A, B, C, D, E, F olyan konstansok, melyekre fennáll, hogy $B^2 < 4AC$. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $F = 1$, mert az origó az ellipszisünkön kívül van. Mivel P és Q rajt van az ellipszisen, ezért

$$A + D + 1 = C + E + 1 = 0$$

Tehát az ellipszisünk egyenlete így írható:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 - (A+1)x - (C+1)y + 1 = 0$$

Rögzízett s számra $0 < s < 1$ esetén tekintsük az $y = s$ egyenletű egyenes és az ellipszis metszéspontjait. A metszéspontok x-koordinátájára olyan másodfokú egyenletet kapunk, melynek a diszkriminánsa:

$$-2A + B^2s^2 + 4As - 2Bs + A^2 - 4ACs^2 - 2ABs + 4ACs + 1$$

Az x-tengely érinti az ellipszist, így $s \longrightarrow 0$ esetén a diszkriminánsnak 0-hoz kell tartania; ezért

$$-2A + A^2 + 1 = 0$$

azaz $A = 1$. Ha most rögzített t számra $0 < t < 1$ esetén tekintjük az $x = t$ egyenletű egyenes és az ellipszis metszéspontjait, akkor hasonló levezetéssel azt kapjuk, hogy $C = 1$. Az ellipszisünk egyenlete tehát ez:

$$x^2 + Bxy + \ y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

Ez változatlan marad, ha benne az x és y betűket felcseréljük. Mindazonáltal az ellipszisnek az $x = y$ egyenletű egyenes az egyik szimmetriatengelye. Márpedig ez az egyenes átmegy az origón. Ezzel a bizonyítás teljessé vált. ■

A fenti állítás következtében kimondhatjuk, hogy ha a kiindulási e ellipszis nem kör, akkor az O pont pontosan 4 olyan helyzetben vehető fel, hogy az (1), (2), (3) állítások teljesüljenek, és ez a 4 pont éppen egy olyan négyzet 4 csúcsa, amely négyzet az ellipszis köré van írva. Itt nem vizsgáljuk a kérdést, hogy az ellipszis köré írható-e másféle négyzet.

Hivatkozás:

Wikipédia: *Ellipszis_(görbe)* (2020).
https://hu.wikipedia.org/wiki/Ellipszis_(g%C3%B6rbe)