Haladvány Kiadvány 2021-03-09

# Rényi Alfréd levele Riesz Frigyeshez 1945-ben

Hujter Mihály

hujter.misi@gmail.com

*Rényi Alfréd* születésének centenáriumára dedikálva

A kombinatorikus optimalizálásban alapvető eredmény az a tétel melyet 1916-ban *Kőnig Dénes* publikált, 1917-ben pedig *Georg Frobenius*. Hogy Kőnig és Frobenius eredménye teljesen független-e, nem tudjuk, de jóhiszeműen feltételezzük.

Bár tudomásunk szerint Kőnignek és Frobeniusnak volt közös magyar tanítványa az 1910-es évek elején. Mindazonáltal manapság mind Kőnig, mind Frobenius nevét szokás feltüntetni a tétel vonatkozásában.

Tekintsünk egy $q$-szor $q$-as méretű mátrixot, melynek minden eleme vagy nulla vagy egy betű; a betűk egymástól mind különböznek. Kérdezzük, hogy a determináns, mint többhatározatlanú polinom, nulla-e, vagy sem. Egy mátrix félkerületén a sorai számának és oszlopai számának összegét értjük.

**Kőnig és Frobenius tétele:** *Nulla determináns csak úgy lehet, ha van egy olyan csupa nulla elemű almátrix, melynek félkerülete nagyobb, mint az eredeti mátrix félkerületének a fele.*

Az világos, hogy ha van egy $q$-nál nagyobb félkerületű almátrix csupa nullával, akkor a $q$-szor $q$-as determináns csak nulla lehet. A tárgyalt tétel éppen ennek a triviális állításnak a megfordítása, és a megfordítás már egyáltalán nem triviális.

A *Frobenius–Kőnig*-tételt teljes indukcióval lehet igazolni. A $q = 1$ eset nyilvánvaló. A $q = 2$ eset sem nehéz, bár némi meggondolást igényel. Ennek az esetnek egy tréfás átfogalmazása a következő feladat Kőnigtől: *Ha egy fiókban zoknik vannak egy- vagy többféle színben és egy- vagy többféle méretben, és a sötétben kiveszek két zoknit a fiókból, akkor csak olyan esetben lehetek teljesen biztos abban, hogy vagy a színben, vagy a méretben, esetleg mindkettőben egymáshoz illik a két zokni, ha vagy csak egyféle szín fordult elő a fiókban, vagy csak egyféle méret.*

Az általános esetben a bizonyítás kulcsa az indukciós lépés.

**A tétel bizonyítása:** Tekintünk egy konkrét $q > 1$ számot, és egy konkrét $q$-szor $q$-as mátrixot, melynek nulla a determinánsa. Találnunk kell pár sort – mondjuk $m$ darabot – és $q+1-m$ darab oszlopot úgy, hogy az $m$ darab sor és a $q+1-m$

darab oszlop kereszteződésében csupa nulla található. Indukciós feltevésként bizonyítottnak vehetjük Kőnig és Frobenius tételét minden kisebb méretű mátrixra. Azt is feltehetjük a triviálisan könnyű esetek kizárása révén, hogy minden sorban, minden oszlopban van betű. Feltehetjük például, hogy a mátrix bal alsó sarkában is betű van, hiszen az oszlopok felcserélése nem változtatja meg a determináns nulla voltát.

Az utolsó sor szerint kifejtve a determinánst azt kapjuk, hogy az utolsó sor és az első oszlop elhagyásával kapott $(q-1)$-szer $(q-1)$-es méretű aldetermináns is azonosan nulla, hiszen a bal alsó sarokban lévő betű egyedül csak ott fordul elő. Az indukciós feltevés miatt tehát az eredeti mátrixban sorok és oszlopos alkalmas cseréjével a jobb felső sarokba rendezhető egy csupa nulla elemekből álló, pontosan $q$ félkerületű almátrix.

Valamely $s, t$ pozitív egész számokra tehát az eredeti mátrix első $s$ sorának és utolsó $t$ oszlopának a kereszteződésében csupa nulla áll, és $s + t = q$.

Idáig természetes módon haladt a bizonyítás, de most kell egy jó ötlet a továbblépéshez. Az akkor még csak 24 éves Rényi Alfréd levelet írt hazánk egyik legjobb matematikusának, Riesz Frigyesnek, 1945.07.05-én, melyben zseniálisan fejezte be az indukciós lépést:

Tekintsük a bal felső sarokban az $s$-szer $s$-es méretű aldeterminánsot, és a jobb alsó sarokban a $t$-szer $t$-es méretű aldeterminánsot. A két aldetermináns szorzata az eredeti mátrix determinánsa, tehát nulla, ezért vagy a bal felső, vagy a jobb alsó aldetermináns is nulla (esetleg mindkettő az).

Ha az eredeti mátrixot transzponálnánk, és a sorokat is, az oszlopokat is fordított sorrendbe írnánk, akkor a két aldetermináns helyet cserélne (esetleges előjelváltással), és az $s, t$ értékek is felcserélődnének. Feltehetjük tehát, hogy a bal felső aldetermináns nulla. Alkalmazva az indukciós feltevést, van benne $s + 1$ félkerületű csupa nulla almátrix.

Mármost ennek a csupa nulla almátrixnak a sorait az eredeti mátrix jobb felső sarkában lévő csupa nulla elemekkel megtoldhatjuk, és így $s + 1 + t = q + 1$ félkerületű csupa nulla almátrixot nyerünk az eredeti mátrixban. Ezzel a bizonyítás kész.

## Hivatkozások

G. Frobenius, Über zerlegbare Determinanten, Sitzungsb erichte der Königlich Preußischen Akademie derWissenschaften zu Berlin, pp. 274–277 (1917) [újra kiadva: Ferdinand Georg Frobenius, Gesammelte Abhandlungen, Band III (J.-P. Serre, ed.), Springer, Berlin, pp. 701–704 (1968)].

D. König, Über graphen und iher anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre, Math. Ann., 77, pp. 453–465 (1916).

Kőnig, D., Egy levél Kalmár Lászlóhoz, 1935-10-03; publikálva: Szabó P. G., Kalmárium I., Polygon, Szeged (2005).

Rényi A., Egy levél Riesz Frigyeshez, 1945-07-05; publikálva: Szabó P. G., Kiváló tisztelettel, Magyar Tudománytörténeti Intézet, Budapest (2011).