Haladvány Kiadvány 2021-11-09

A Pitagorasz-tétel meglepő variánsai történeti érdekességekkel

Hujter Mihály
hujter.misi@gmail.com

Tartalmi összefoglaló. A híres Pitagorasz-tételt Püthagorasznak, a két és fél ezer éve élt filozófusnak, matematikusnak tulajdonítják, pedig Kínában, Indiában, Mezopotámiában már régóta ismerték. A tételt különböző szintű mélységekben lehet kimondani és bizonyítani. A jól ismert frázis, hogy a derék háromszögekre a-négyzet meg b-négyzet az c-négyzet csak olyan leegyszerűsítés, mint amikor Woody Allen 20 perc alatt olvasta el a *Háború és békét*, és csak annyi maradt meg benne, hogy *oroszokról szól*.

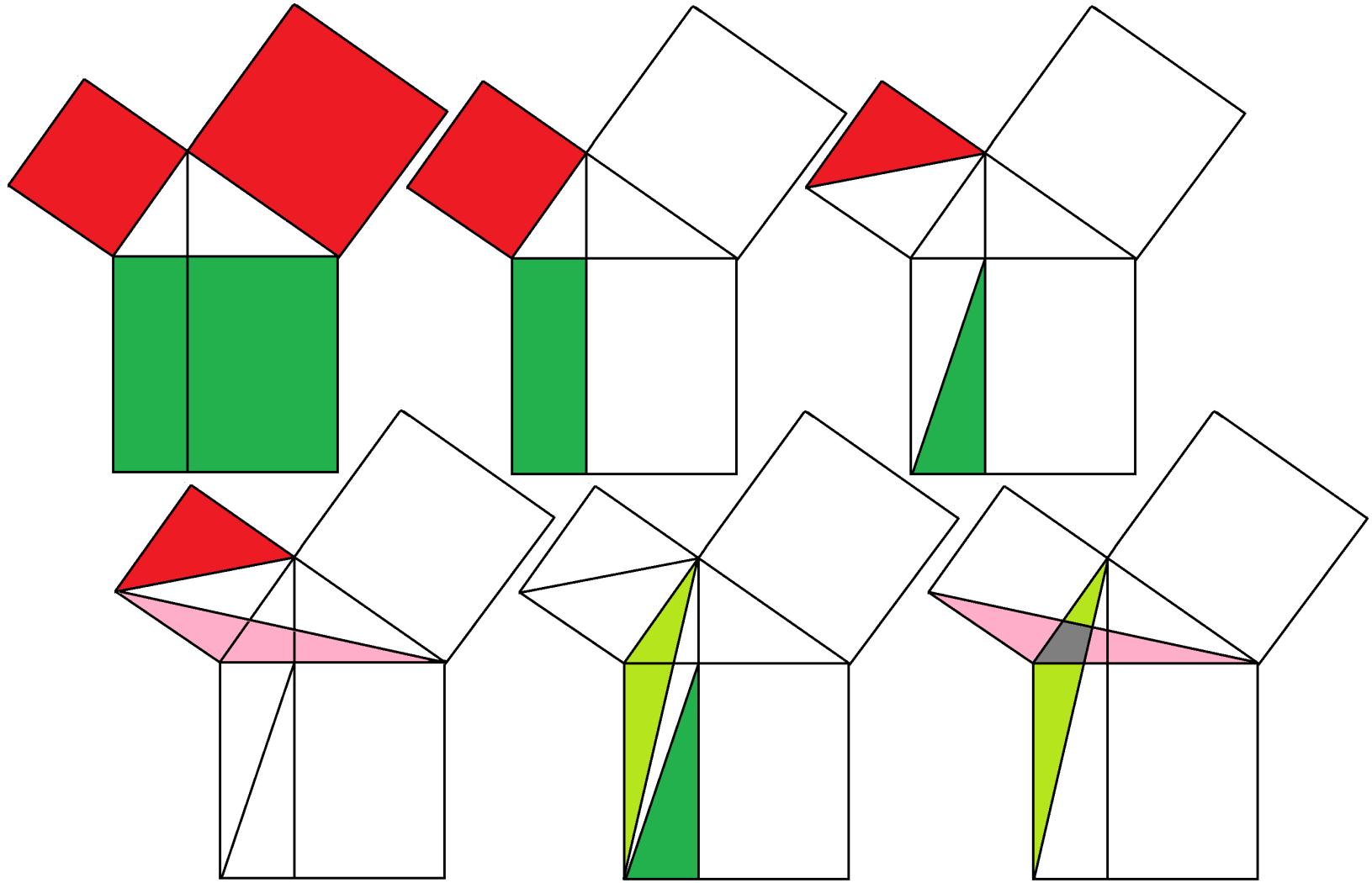
A cím magyarázata. Majdnem négy évtizeddel ezelőtt, amikor a szerző az Egyesült Államokban egy kurzuson vett részt, melynek *Technical Writing* volt a címe, a kedves tanárnő azt tanácsolta: Ha nem tudjuk, hogy mivel érdemes kezdeni, akkor magyarázzuk meg a cím illetve a tartalmi kivonat meghökkentő részleteit.

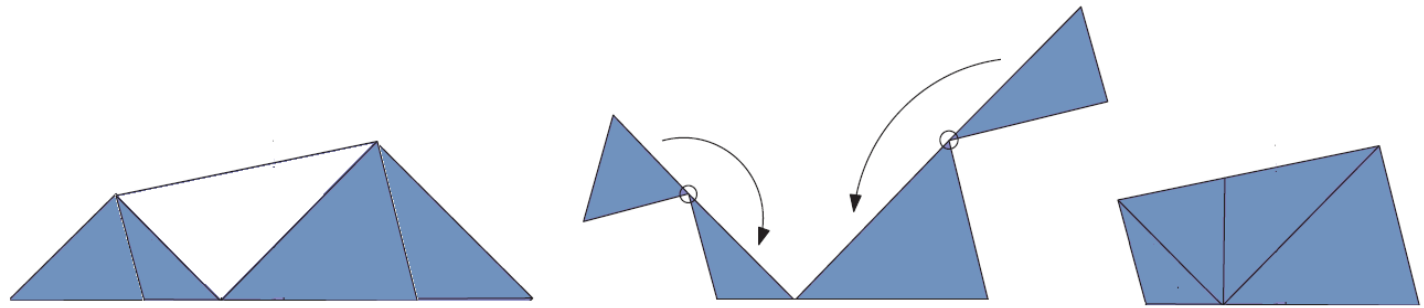
A jól ismert matematikai tételt magyarul *Pitagorasz* névvel illik illetni, holott kiejtés alapján talán *Pitagórász* lenne a helyesebb. Ugyanakkor a nevet adó személyt Püthagorasz változatban szokás leírni magyarul, legalábbis manapság. Nemzetközileg latin betűs írással a *Pythagoras* változat a legnépszerűbb.

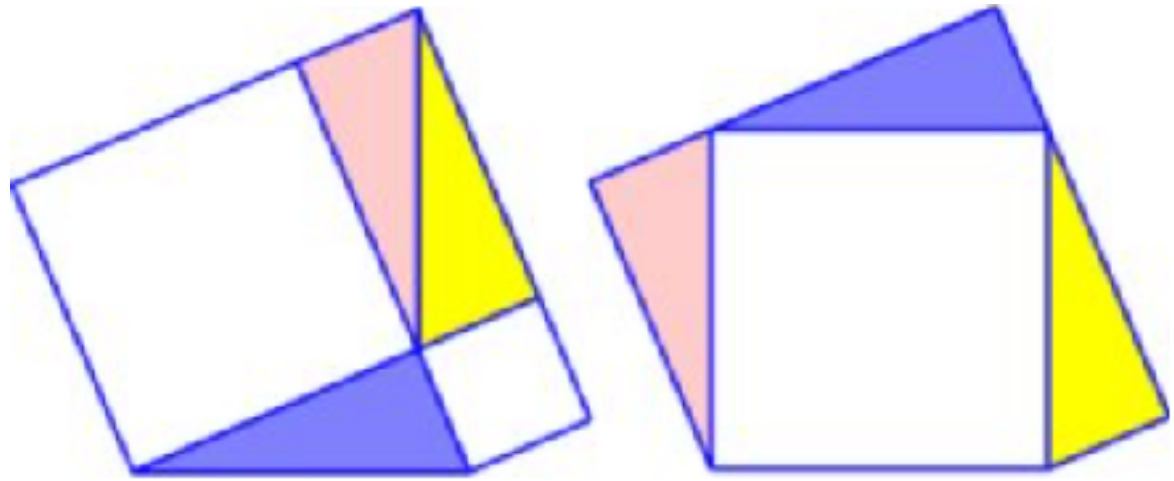
Hogyan szól a tétel? *Ha egy háromszög oldalainak hossza* $a \leq b \leq c$, *akkor az* $a^2 + b^2 = c^2$ *egyenlőség fennállása egyenértékű azzal, hogy a háromszög legnagyobb szöge derékszög*.

Ez egy ősrégi tétel. Tárgyi bizonyítékok mutatják, hogy Kínában, Mezopotámi
ában már jóval Püthagorasz előtt is ismert volt a tétel. Az ő érdeme az volt, hogy
hirdette azt, és állítólag legelőször bizonyította.

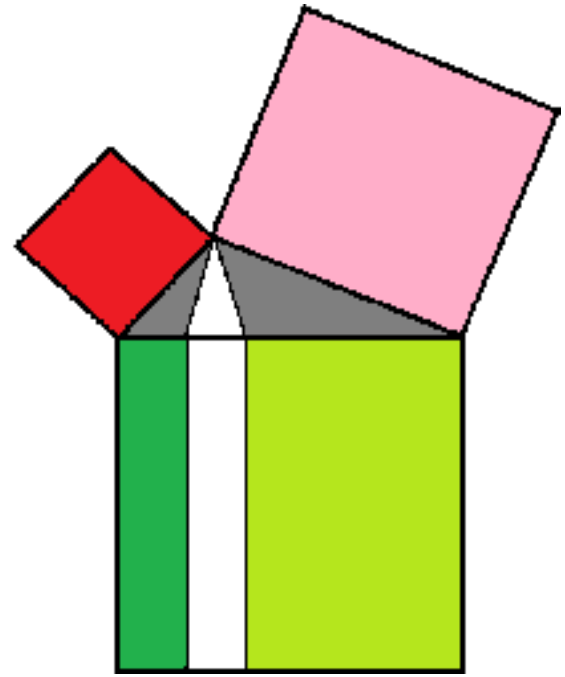
Eukleidész bizonyítása. Az piros-fehér-zöld ábra adja a tétel bizonyítását. A kisebbik piros négyzet fele területben megegyezik a zöld négyzet kisebbik része felével, mivel a piros és rózsaszínű háromszögek azonos méretű alappal és azonos méretű magasságvonallal bírnak; hasonló igaz a sötétzöld és világoszöld háromszögekre is; a rózsaszínű és világoszöld háromszögek pedig egymás derékszögű elforgatottjai. A nagyobbik piros négyzet területe hasonló indoklás mentén megegyezik a zöld négyzet nagyobbik részének területével. Püthagorasz óta nagyon sok más bizonyítás is keletkezett a tételre. Itt most kettőt mutatunk; az ábrák magukért beszélnek.







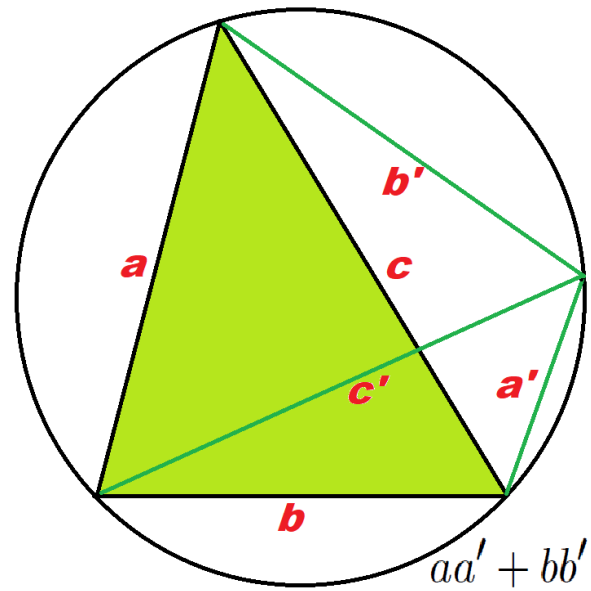
A Pitagorasz-tétel általánosításai. A kilencedik század legvégén Bagdadban működött egy matematikus, kinek a neve több változatban is forgalomban van: *Tábit, Thabit, Szábit, Qurra, Kurra*. Ő általánosította a Pitagorasz-tételt olyan változatba, amely mai megfogalmazásban lényegében a koszinusztétel. Tábit tételének szemléltetésére tekinsünk egy nem hegyesszögű háromszöget, és a legnagyobb szögű csúcsából induló szakaszokkal vágjunk le két kisebb, az eredetihez hasonló háromszöget az ábra szerint. Mármost a piros négyzet és a sötétzöld téglalap területe megegyezik. Hasonlóképpen a rózsaszínű négyzet és a világoszöld téglalap területe is megegyezik.



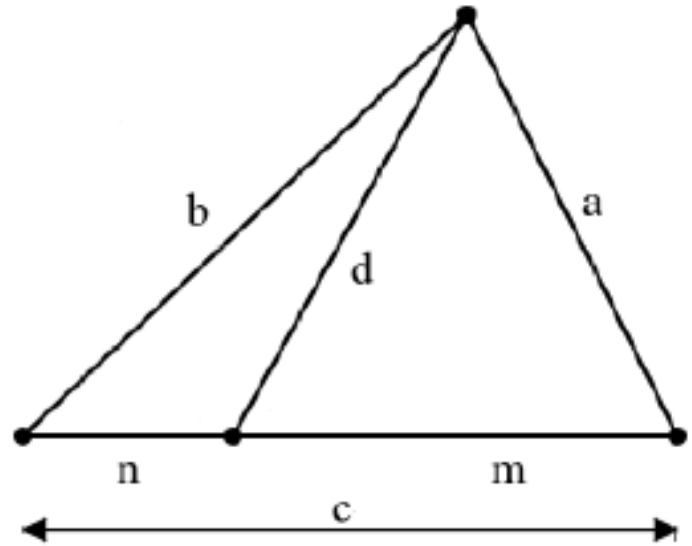
De még Tábit előtt 8 évszázaddal ismertté vált a Pitagorasz-tétel egy általánosítása, a *Ptolemaiosz*-tétel: Tetszőleges, a, b, c oldalú háromszög körülírt körén, a c oldal melletti íven vegyünk fel egy pontot úgy, hogy annak a c-vel szembeni háromszögcsúcstól mért távolsága legyen c', az a-val szembeni csúcstól való távolság legyen a', a b-vel szembeni csúcstól való távolság pedig b'. Ekkor

$$aa' + bb' = cc'$$

Világos, hogy ha a c-vel szembeni csúcsnál derékszög van, és ezen csúcsból induló átmérő másik végpontján vesszük fel a negyedik csúcsot, akkor $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$.



$$aa' + bb' = cc'$$



Stewart tétele. A tizennyolcadik századból származik a következő tétel:

$$a^2n + b^2m = c(mn + d^2)$$

Ha $n = m = d = \frac{c}{2}$, akkor $a^2 + b^2 = c^2$.

Egy érdekes következménye Stewart tételének Egerváry Jenő következő tétele a huszadik század közepéről: Ha egy háromszög oldalainak hossza x, y, z, súlyvonalainak hossza u, v, w, akkor azon háromszög súlyvonalainak hossza, melynek oldalhosszúságai u, v, w, éppen $3x/4, 3y/4, 3z/4$. Valóban, $a = x$, $b = y$, $c = 2n = 2m = z$, $d = w$ szereposztással megkapjuk, hogy

$$\frac{x^2 z}{2} + \frac{y^2 z}{2} = z\left(\frac{z^2}{4} + w^2\right)$$

azaz

$$w^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{4}$$

Hasonlóképpen

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} - \frac{x^2}{4} \\ v^2 &= \frac{z^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} \end{aligned}$$

Tehát az u, v, w oldalú háromszög súlyvonalainak négyzete:

$$\frac{\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} - \frac{x^2}{4}}{2} + \frac{\frac{z^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4}}{2} - \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{4}}{4} = \frac{9z^2}{16}$$

illetve hasonlóan $\frac{9x^2}{16}$, $\frac{9y^2}{16}$.

Egerváry tételének egy másik megfogalmazása a következő: Egy a, b, c oldalú háromszögre jelölje a' a súlypontnak az a oldallal szemközti csúcstól mért távolsága $\sqrt{3}$-szorosát. Ekkor $a'' = a$, $b'' = b$, $c'' = c$.

Heron-képlet. Tekintsük a következő algebrai azonosságot. Mivel a jobb oldalon a Heron-képlet szerint az a, b, c oldalú háromszög területe négyzetének 16-szorosa van, és mivel derékszögű háromszögre a, b befogókkal a háromszög területe négyzetének 16-szorosa éppen $4a^2b^2$, ezért innen is megkapjuk a Pitagorasz-tételt.

$$\begin{aligned} & 4a^2b^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2 \\ = \; & (a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c) \end{aligned}$$

A gömb felszínén. Regiomontanus találta meg a tizenötödik század közepén, hogy a gömb felszínén a Pitagorasz-tétel megfelelője: $\cos a \cdot \cos b = \cos c$. Ha a sorfejtéseket tekintjük, akkor

$$\begin{aligned}
\cos a &= 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} - \cdots \\
\cos b &= 1 - \frac{b^2}{2} + \frac{b^4}{24} - \cdots \\
\cos c &= 1 - \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{24} - \cdots
\end{aligned}$$

Mindazonáltal, ha $0 < a, b, c < \varepsilon$, akkor

$$\cos a \cdot \cos b - \cos c = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$$

Bolyai geometriája. A Bolyai-síkon a Pitagorasz-tétel megfelelője: $\cosh a \cdot \cosh b = \cosh c$. Ha a sorfejtéseket tekintjük, akkor

$$\begin{aligned} \cosh a &= 1 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} + \cdots \\ \cosh b &= 1 + \frac{b^2}{2} + \frac{b^4}{24} + \cdots \\ \cosh c &= 1 + \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{24} + \cdots \end{aligned}$$

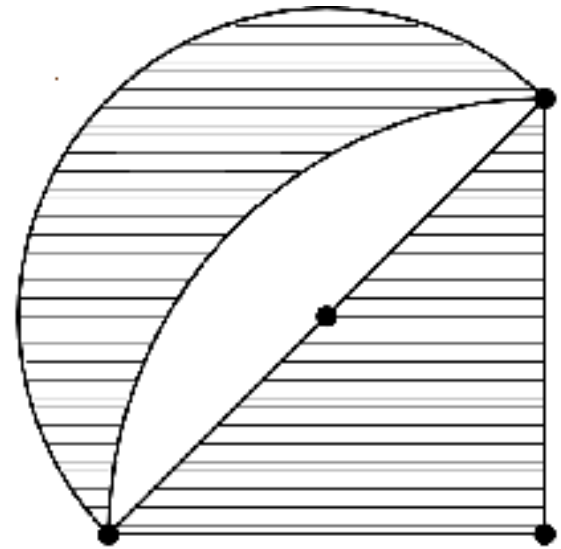
Mindazonáltal, ha $0 < a, b, c < \varepsilon$, akkor

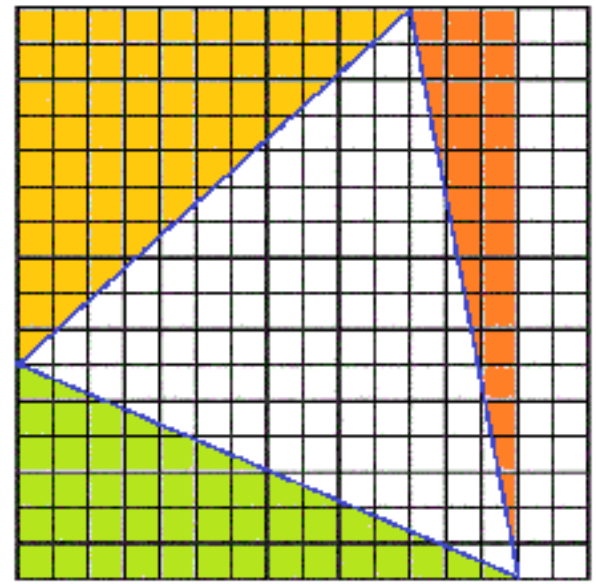
$$\cosh a \cdot \cosh b - \cosh c = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$$

Szabadkőművesek. A híres-hírhedt szabadkőművesek egyik fontos jelképe a Pitagorasz-tétel.

Csak találgatásaink lehetnek, hogy miért használják ezt a szimbólumot. Az egyik elmélet szerint, ha egy építőmesternek sík terepen ki kell jelölni egy derékszöget, de csak 3 karó és egy hosszú zsineg áll rendelkezésére, akkor megteheti a következőt: A zsinegre egyenletes távolságokban 12 csomót köt úgy, hogy a legelsőt egybeköti a legutolsóval, aztán a $3^2 + 4^2 = 5^2$ képlet alapján a 12

egységnyi kerületű hurokkal kitűzhet a 3 karó segítségével egy derékszögű háromszöget $3, 4, 5$ egységnyi oldalakkal. Az Eukleidész-féle bizonyítás pedig felhasználható arra, hogy több téglalap területét számolgatások nélkül összehasonlíthassuk, hiszen a bizonyítás mentén mindegyik téglalaphoz azonos területű négyzet szerkeszthető.



Khioszi Hippokratész holdacskája. Hamar meggyőződhetünk arról, hogy az ábrán látható negyedkör és félkör területe megegyezik. Mindazonáltal a vonalkázott területek is azonos mértékűek. De végesen nem egymásba darabolhatók.

Egy frappáns bizonyítás. A következő bizonyítást a jelen írás szerzője még gimnazista korában találta ki. A bizonyítás annyira megtetszett Reiman István tanár úrnak, hogy egyik könyvében még publikálta is. Állítás: *Kockás papírra nem rajzolható pontos szabályos háromszög*. Indirekt bizonyítás: Ha az elemi négyzetek 2×2-es méretűek, akkor a Pitagorasz-tétel alapján a szabályos háromszög területe egész szám lenne, és egyúttal egy egész szám $\sqrt{3}$-szorosa. De ekkor a terület négyzetében a 3 prímtényező kitevőjének párosnak is és páratlannak is kellene lennie.