Haladvány Kiadvány 2021-11-14

Háromszögek duális háromszöge

Hujter Mihály
hujter.misi@gmail.com

Matthew Stewart tétele. A tizennyolcadik század közepéről származik a következő tétel: *Egy a, b, c oldalú háromszög c oldalán vegyünk fel egy pontot úgy, hogy annak a c oldallal szembeni csúcstól mért távolsága d, az a-val illetve b-vel szembeni csúcsoktól mért távolság pedig m illetve n. Ekkor fennáll a következő:*

$$a^2n + b^2m = (d^2 + mn)(m + n)$$

Ha $n = m = d = \frac{c}{2}$, akkor $a^2 + b^2 = c^2$. A tétel tehát a Pitagorasz-tétel általánosítása.

Egy érdekes következménye Stewart tételének Egerváry Jenő következő eredménye a huszadik század közepéről: *Ha egy háromszög oldalainak hossza* x, y, z, *súlyvonalainak hossza* u, v, w, *akkor azon háromszög súlyvonalainak hossza, melynek oldalhosszúságai* u, v, w, *éppen* $3x/4, 3y/4, 3z/4$. Valóban, $a = x$, $b = y$, $c = 2n = 2m = z$, $d = w$ szereposztással Stewart tételéből megkapjuk, hogy

$$\frac{x^2 z}{2} + \frac{y^2 z}{2} = \left(w^2 + \frac{z^2}{4} \right) z$$

azaz

$$w^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{4}$$

Hasonlóképpen

$$u^2 = \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} - \frac{x^2}{4} \ ; \qquad v^2 = \frac{z^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4}$$

Tehát az u, v, w oldalú háromszög súlyvonalainak négyzete:

$$\frac{\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} - \frac{x^2}{4}}{2} + \frac{\frac{z^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4}}{2} - \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{4}}{4} = \frac{9z^2}{16}$$

illetve hasonlóan $9x^2/16$, $9y^2/16$.

Egerváry tételének egy másik megfogalmazása a következő: Egy a, b, c oldalú háromszögre jelölje a' a súlypontnak az a oldallal szemközti csúcstól mért távolsága $\sqrt{3}$-szorosát. Ekkor $a'' = a$, $b'' = b$, $c'' = c$, hiszen a' éppen $\left(2/\sqrt{3}\right)$-

szorosa az a-t felező súlyvonal hosszának, és így a fentiek alapján

$$\left(a'\right)^2 = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{3}$$

és hasonlóképpen

$$\left(b'\right)^2 = \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{3} \quad ; \qquad \left(c'\right)^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{3}$$

Mindazonáltal

$$\begin{aligned} \left(a''\right)^2 &= \frac{2\left(b'\right)^2 + 2\left(c'\right)^2 - \left(a'\right)^2}{3} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{2c^2+2a^2-b^2}{3} + 2 \cdot \frac{2a^2+2b^2-c^2}{3} - \frac{2b^2+2c^2-a^2}{3}}{3} = a^2 \end{aligned}$$

és hasonlóképpen $(b'')^2 = b^2$, $(c'')^2 = c^2$.

A fentiek szerint tehát

$$a' = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{3}}\ ;\quad b' = \sqrt{\frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{3}}\ ;\quad c' = \sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{3}}$$

Érdekesség, hogy $a^2 + b^2 = c^2$ esetén $c' = c/\sqrt{3}$.

Egerváry-féle duális háromszög. Egy a, b, c oldalú háromszög Egerváry-féle duálisának nevezzük az a', b', c' oldalú háromszöget.

A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy egyenlő oldalú háromszög duálisa önmaga, továbbá $a \leq b \leq c$ esetén $a' \geq b' \geq c'$, $a = b \leq c$ esetén $a' = b' \geq c'$, $a \leq b = c$ esetén $a' \geq b' = c'$. Következésképpen egyenlő szárú háromszög duálisa is egyenlő szárú, továbbá ha a szárak közt 60°-nál nagyobb szög volt,

akkor a duálisban 60°-nál kisebb szög lesz, ha a szárak közt 60°-nál kisebb szög volt, akkor a duálisban 60°-nál nagyobb szög lesz.

Ha egy háromszöget a λ-szorosára nagyítunk, akkor a duális háromszög is a λ-szorosára nagyítódik. Tehát az eredeti háromszög szögei meghatározzák a duális háromszög szögeit is.

Egyenlőszárú háromszögek duálisa. Jelölje egy egyenlő szárú háromszögben a szárak közti szög koszinuszát k, a duális háromszögben pedig k^*. A továbbakban összefüggést keresünk k és k^* között. A fentiek alapján tudjuk, hogy ha $k = \frac{1}{2}$, akkor $k^* = \frac{1}{2}$, ha $k < \frac{1}{2}$, akkor $k^* > \frac{1}{2}$, $k < \frac{1}{2}$, akkor $k^* > \frac{1}{2}$. Mivel duális duálisa az eredeti, az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $k \leq \frac{1}{2}$. Tehát $a = b \leq c$. A koszinusztétel miatt $c^2 = (2 - 2k)a^2$. Hasonlóképpen

$(c')^2 = (2-2k^*)\,(a')^2$. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $a = b = 1$. Tehát

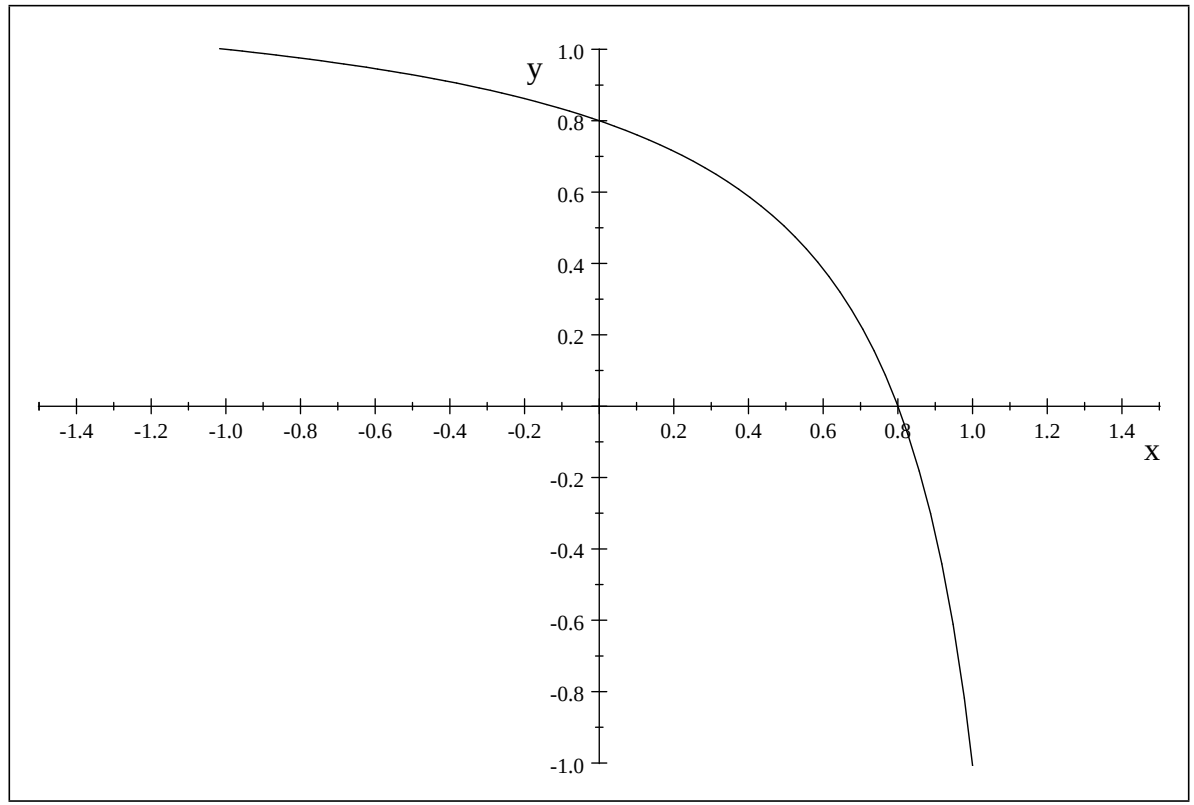
$$\begin{aligned} c^2 &= 2-2k \\ \left(a'\right)^2 &= \frac{2b^2+2c^2-a^2}{3} = \frac{1+2(2-2k)}{3} = \frac{5-4k}{3} \\ \left(c'\right)^2 &= \frac{2a^2+2b^2-c^2}{3} = \frac{4-(2-2k)}{3} = \frac{2+2k}{3} \end{aligned}$$

Azt nyerjük tehát, hogy $\frac{2+2k}{3} = (2-2k^*)\cdot\frac{5-4k}{3}$, azaz $5k+5k^* = 4+4kk^*$, azaz

$$k^* = \frac{4-5k}{5-4k} \quad ; \qquad k = \frac{4-5k^*}{5-4k^*}$$

Ha derékszögű koordinátarendszerben ábrázoljuk k és k^* összefüggését, akkor egy olyan hiperbolaívre jutunk, melynek a szimmetriatengelye a $k = k^*$ egyenletű

egyenes. A szimmetriatengely és a hiperbolaív metszéspontja az egyenlő oldalú háromszögnek felel meg.



Tehát ha ismerjük k és k^* bármelyikét, mindkét háromszög összes szögét meg tudjuk határozni. Az a, a, c oldalú háromszögben az a és a c oldalak által bezárt szög koszinuszát s-el jelölve a háromszög egyenlőszárú mivoltából azt nyerjük, hogy $k = 1 - 2s^2$, amiből $s = \sqrt{(1-k)/2}$. A duális háromszögben pedig az a' és a c' oldalak által bezárt szög koszinusza:

$$\sqrt{(1-k^*)/2} = \sqrt{\frac{1-\frac{4-5k}{5-4k}}{2}} = \sqrt{\frac{1+k}{10-8k}}$$

Talán érdemes külön megvizsgálni az egyenlőszárú derékszögű háromszög esetét. Itt $k = 0$ és $s = 1/\sqrt{2}$, tehát $k^* = 4/5$, és a duális háromszögben a másik két szög koszinusza: $1/\sqrt{10}$. Fokokban mérve a duális háromszög szögei közelítőleg $36°52'$ illetve $71°34'$ nagyságúak. Valóban $36°52' + 2 \cdot 71°34 = 180°$.

Duális háromszög területe. A jelen dolgozat főtétele következik: *Minden háromszög területe megegyezik a duális háromszög területével*.

A bizonyításhoz felhasználjuk a Héron-képlet ezen változatát: *Ha egy háromszög oldalai* $2\sqrt{A}$, $2\sqrt{B}$, $2\sqrt{C}$, *akkor a területének a négyzete*: $(A+B+C)^2 - 2A^2 - 2B^2 - 2C^2$.

Mármost a $2\sqrt{A}$, $2\sqrt{B}$, $2\sqrt{C}$ oldalú háromszög duálisának oldalai a fentiek szerint:

$$2\cdot\sqrt{\frac{2B+2C-A}{3}} \quad ; \quad 2\cdot\sqrt{\frac{2C+2A-B}{3}} \quad ; \quad 2\cdot\sqrt{\frac{2A+2B-C}{3}}$$

Tehát a duális háromszög területének a négyzete:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2B+2C-A}{3}+\frac{2C+2A-B}{3}+\frac{2A+2B-C}{3}\right)^2 \\ & -2\left(\frac{2B+2C-A}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{2C+2A-B}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{2A+2B-C}{3}\right)^2 \\ = \;& (A+B+C)^2 - 2A^2 - 2B^2 - 2C^2 \end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Derékszögű háromszögek duálisa. Dolgozatunk legvégén visszatérünk a derékszögű háromszögekre. A fentiek alapján kimondhatjuk, hogy egy derékszögű háromszög duálisa olyan háromszög lesz, melynek legrövidebb oldala az eredeti háromszög átfogójának $1/\sqrt{3}$-szorosa lesz, az ehhez a legrövidebb oldalhoz tartozó magasság pedig az eredeti háromszögben az átfogóhoz tartozó magasságnak a $\sqrt{3}$-szorosa lesz. A duális háromszögben a legrövidebb oldalon lévő nagyobbik szög koszinuszát pedig az eredeti derékszögű háromszög legkisebb szögének t tangenséből a következő módon határozhatjuk meg: Nyilván $t \leq 1$. Az eredeti derékszögű háromszög hosszabbik befogóját b-vel jelölve a rövidebbik befogó nyilván $a = tb$, az átfogó pedig $c = \sqrt{1-t^2}b$. Mindazonáltal

$$a' = a \cdot \sqrt{\frac{4+t^2}{3}}\ ; \quad b' = a \cdot \sqrt{\frac{1+4t^2}{3}}\ ; \quad c' = a \cdot \sqrt{\frac{1+t^2}{3}}$$

Így a koszinusztétel alapján a keresett szög q koszinuszára azt kapjuk, hogy

$$\frac{4+t^2}{3} = \frac{1+4t^2}{3} + \frac{1+t^2}{3} - 2q \cdot \sqrt{\frac{1+4t^2}{3} \cdot \frac{1+t^2}{3}}$$

azaz

$$q = \frac{2t^2-1}{\sqrt{1+5t^2+4t^4}}$$

Tehát speciális esetént megkapjuk, hogy egy derékszögű háromszög duálisa akkor és csak akkor lesz derékszögű háromszög, ha $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$, azaz a befogók aránya éppen $\sqrt{2}$. Mindazonáltal az 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ oldalú háromszög duálisának oldalai: $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, 1.

Egy nyitott probléma. Vajon minden fix k-ra, melyre $-1 < k \leq \frac{1}{2}$, létezik-

e olyan önduális háromszög, melyben az egyik szög koszinusza éppen k ? A fentiekben a $k = 0$ és a $k = \frac{1}{2}$ eseteket tisztáztuk. A $k = -\frac{1}{2}$ eset is rendben van, hiszen az $1, 2, \sqrt{7}$ oldalú, 120°-os szögű háromszög duálisa $\sqrt{7}, 2, 1$ oldalú. Még a $k = \cos 108^\circ$ esetben is találtunk önduális háromszöget

$$\begin{aligned} a &= 4 \\ b &= \sqrt{38 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1 \approx 7.0264, \\ c &= 2\sqrt{18 - 2\sqrt{5} + \left(\sqrt{5} - 1\right)\sqrt{38 - 2\sqrt{5}}} \approx 9.0962 \end{aligned}$$

oldalakkal.