Haladvány Kiadvány 2021-12-02

A szabályos tizennégyszög egészszám-tulajdonságáról

Hujter Mihály
hujter.misi@gmail.com

Tétel. Legyen $A_0A_1\cdots A_{13}$ egy szabályos 14-szög, ahol A_0 és A_7 távolsága 2 egységnyi. Ekkor minden n egész számra $A_0A_1^{2n}+A_0A_3^{2n}+A_0A_5^{2n}$ is egész szám. Például $n=1$ esetén 5, $n=2$ esetén 13, továbbá $n=-1$ esetén 6.

Bizonyítás. Jelölje $A_0A_1^{2n} + A_0A_3^{2n} + A_0A_5^{2n}$ értékét a_n. Legyen $u = \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$. Világos, hogy $u^7 = -1$, és hogy a komplex számsíkon $k = 0, 1, 2, \cdots, 13$ esetén A_k és u^k egymással azonosítható. Így $k = 1, 3, 5$ esetén

$$A_0A_k^2 = \left(u^k - 1\right)\left(u^{14-k} - 1\right) = u^{14} - u^k - u^{14-k} + 1 = 2 - u^k + u^{7-k}$$

Az egyszerűbb jelölések érdekében használjuk a p, q, r betűket: $p = 2-u+u^6 \approx 0.198$, $q = 2 - u^3 + u^4 \approx 1.555$ és $r = 2 + u^2 - u^5 \approx 3.247$.

Mármost

$$a_0 = A_0A_1^0 + A_0A_3^0 + A_0A_5^0 = p^0 + q^0 + r^0 = 1 + 1 + 1 = 3$$

és

$$\begin{aligned} a_1 &= p+q+r \\ &= \left(2-u+u^6\right)+\left(2-u^3+u^4\right)+\left(2+u^2-u^5\right) \\ &= u^6-u^5+u^4-u^3+u^2-u+1+5 \\ &= \frac{1-(-u)^7}{1-(-u)}+5=5 \end{aligned}$$

Továbbá

$$\begin{aligned}
a_2 &= p^2+q^2+r^2 \\
&= \left(2-u+u^6\right)^2+\left(2-u^3+u^4\right)^2+(2+u^2-u^5)^2 \\
&= u^{12}+u^{10}+u^8-6u^7+5u^6-4u^5+5u^4-4u^3+5u^2-4u+12 \\
&= -u^5-u^3-u+6\ +5u^6-4u^5+5u^4-4u^3+5u^2-4u+12 \\
&= 5u^6-5u^5+5u^4-5u^3+5u^2-5u+5+13 \\
&= 5\cdot\frac{1-(-u)^7}{1-(-u)}+13 \\
&= 13
\end{aligned}$$

A fetiekből megkapjuk, hogy

$$pq+qr+rp=\frac{a_1^2-a_2}{2}=\frac{5^2-13}{2}=6$$

Kiszámíthatjuk továbbá a következőt:

$$\begin{aligned} pqr &= \left(2-u+u^6\right)\left(2-u^3+u^4\right)\left(2+u^2-u^5\right) \\ &= -u^{15}+u^{14}+u^{12}-3u^{11}+3u^{10}-5u^9+4u^8-u^7 \\ &\quad +9u^6-8u^5+6u^4-6u^3+4u^2-4u+8 \\ &= -u+1-u^5+3u^4-3u^3+5u^2-4u+1 \\ &\quad +9u^6-8u^5+6u^4-6u^3+4u^2-4u+8 \\ &= 9u^6-9u^5+9u^4-9u^3+9u^2-9u+9+1 \\ &= 9\cdot\frac{1-(-u^7)}{1-(-u)}+1=1 \end{aligned}$$

A fentiekből következően p, q, r a következő harmadfokú polinom három külön-

böző valós gyöke:

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-p)(z-q)(z-r) \\ &= z^3 - (p+q+r)z^2 + (pq+qr+rp)z - pqr \\ &= z^3 - 5z^2 + 6z - 1 \end{aligned}$$

Ezekből adódóan a $z = p$, a $z = q$ és a $z = r$ esetben is fennáll tetszőleges egész n-re, hogy

$$z^{n+3} = 5z^{n+2} - 6z^{n+1} + z^n$$

Tehát

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= 5a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_{n+3} \\ a_{n-3} &= 6a_{n-2} - 5a_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

Fent láttuk, hogy $a_0 = 3$, $a_1 = 5$, $a_2 = 13$, tehát teljes indukcióval megkapjuk, hogy minden egész n-re a_n egész szám. Például $a_{-1} = 6a_0 - 5a_1 + a_2 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 5 + 13 = 6$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.