A koszinusztétel trigonometria nélkül

Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém,
szalkai@almos.uni-pannon.hu

21.12.23.

Haladvány Kiadvány, 2021.12.23.
http://www.math.bme.hu/~hujter/211223.pdf

Bevezető

A koszinusztételnek számtalan "elemi" bizonyítása ismert, de áttekintett forrásaink ([2]-[7]) mindegyike a szögfüggvények trigonometriai azonosságait is felhasználják. Az alább közölt okfejtés mindössze csak a koszinusz függény *elemi* definícióját (hegyesszögek esetén) használja fel, és a Pitagorasz tétellel való kapcsolatának egy másik oldalát is megmutatja[1)]. A bizonyítás ötletét Hujter Mihály [1] cikkéből vettük, a [3] forrásban szereplő ábra csak hasonló ehhez.

Egy elemi bizonyítás

Az ábrán egy ABC *tompaszögű* háromszöget látunk, derékszögű háromszögben $\delta = 0$, hegyesszögű háromszögnél $\delta < 0$.

Legyen tehát $\gamma > 90^o$, és a C csúcsból húzzunk α és β szögben szakaszokat az ábrán látható módon ($\gamma \leq 90^o$ esetén értelem szerint, hasonlóan). Mivel az $ABC\Delta$, $CBS_1\Delta$ és $ACS_2\Delta$ háromszögek hasonlóak, ezért

$$\frac{a}{p} = \frac{c}{a} \quad \textit{és} \quad \frac{b}{q} = \frac{c}{b} \tag{1}$$

azaz

$$a^2 = pc \quad \textit{és} \quad b^2 = qc \ , \tag{2}$$

vagyis az ábrán jelölt sárga és kék téglalapok területei egyenlőek.

Derékszögű háromszögben $\delta = 0$, azaz $p + q = c$, vagyis visszakaptuk Pitagorasz tételét!

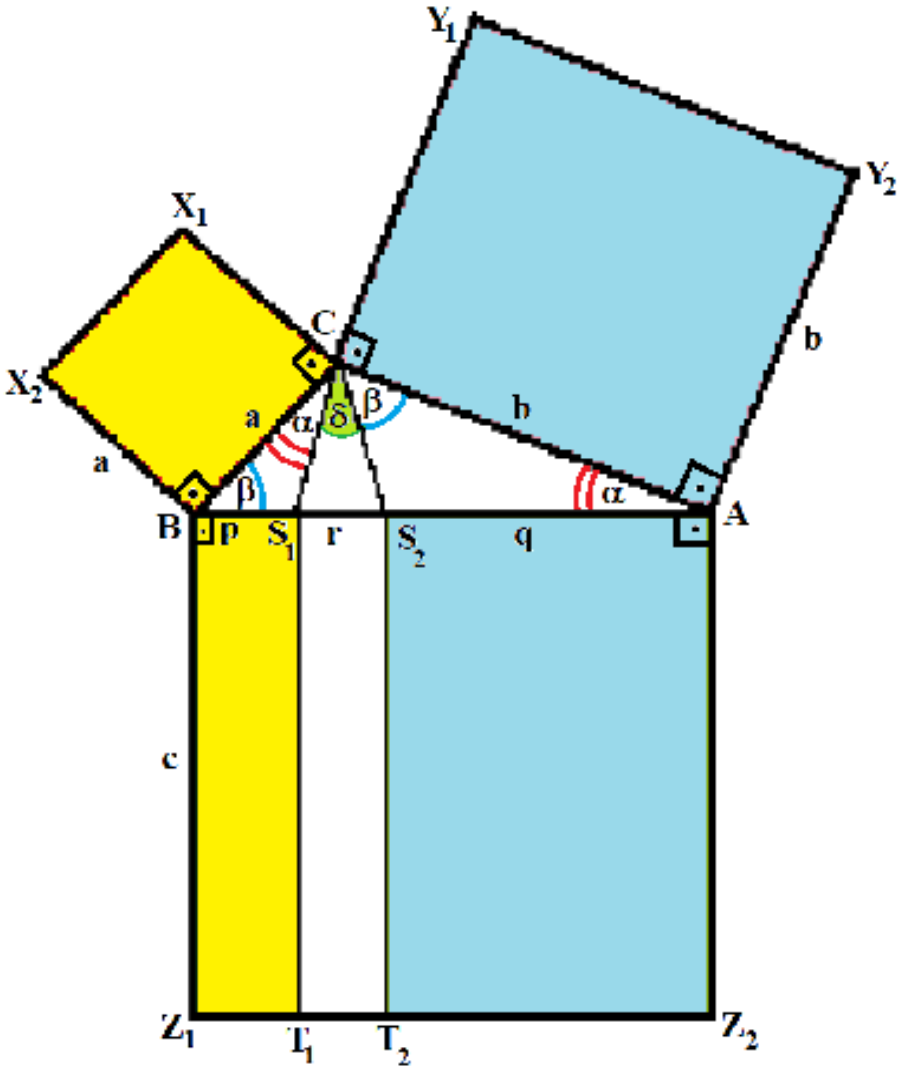
Tompa- és *hegyes-* szögű háromszögben pedig

$$c^2 = a^2 + b^2 + cr \tag{3}$$

illetve

$$c^2 = a^2 + b^2 - cr \ . \tag{4}$$

[1)] Azonban a koszinusztétel alább következő bizonyítása hegyes-, derék- és tompaszögű háromszögek mindegyikére érvényes.



De mekkora r illetve cr ? Könnyen látható, hogy $CS_1S_2\Delta$ egyenlő szárú háromszög, hiszen alapon fekvő szögei γ',
ahol $90^o < \gamma$ esetén $\gamma' = 180^o - \gamma = \alpha + \beta$ (és $\delta = \gamma - (\alpha + \beta) = 2\gamma - 180^o$),
míg $\gamma < 90^o$ esetén $\gamma' = \gamma$ (és $\delta = 180^o - 2\gamma$).

Legyen $x := CS_1 = CS_2$, ekkor

$$\cos(\gamma') = \frac{r/2}{x} = \frac{r}{2x} \tag{5}$$

(ne feledjük: γ' mindenképpen hegyesszög),
valamint $CBS_1\Delta \sim ABC\Delta$ miatt $\frac{a}{x} = \frac{c}{b}$, vagyis $x = \frac{ab}{c}$, tehát

$$r = 2x\cos(\gamma') = 2 \cdot \frac{ab}{c}\cos(\gamma') \ , \tag{6}$$

vagyis

$$cr = 2ab\cos(\gamma') \ . \tag{7}$$

Végül, a (3) és (4) összefüggések keresett alakjai:
tompaszögű háromszög esetén

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(180^o - \gamma) \ , \tag{8}$$

hegyesszögű háromszög esetén

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \ . \tag{9}$$

$o\pi\varepsilon\rho\ \check{\varepsilon}\delta\varepsilon\iota\ \delta\varepsilon\tilde{\iota}\xi\alpha\iota$ (ejtsd: "hóper édei deîxai", azaz Q.E.D.) $\square$

Hivatkozások

[1] **Hujter Mihály:** *A Pitagorasz-tétel meglepő variánsai történeti érdekességek*, Haladvány Kiadvány 2021, https://math.bme.hu/~hujter/halad.htm , http://math.bme.hu/~hujter/211109.pdf

[2] **Wikipédia:** *Koszinusztétel*, https://hu.wikipedia.org/wiki/Koszinusztétel

[3] **Wikipedia:** *Loi des cosinus*, https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_des_cosinus

[4] **Wikipedia:** Law of cosines, https://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_cosines

[5] **Wikipedia:** *Kosinussatz*, https://de.wikipedia.org/wiki/Kosinussatz

[6] **Wikipedia:** *Teorema del cosinus*, https://ca.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_cosinus

[7] **Wikipedia:** *Teorema del coseno*, https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_coseno