Haladvány Kiadvány 2022-01-13

Sok pont kevés egyenesen

Hujter Mihály
hujter.misi@gmail.com

Tartalmi összefoglaló. A dolgozatban Lovász László egy régi feladatának új megoldásait tekintjük.

Motiváció. A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok (röviden KöMaL) 2021 decemberében tűzte ki a következő feladatot a legnehezebbnek véltek között [2]: *Adott a síkon* 666 *különböző pont úgy, hogy nem fedhetők le* 10 *darab egyenessel.*

Bizonyítandó, hogy ekkor kiválasztható közülük 66 *pont úgy, hogy már azok sem fedhetők le* 10 *darab egyenessel.* A feladat ötlete Lovász László egy régi rejtvényéből származik, de nincs tudomásunk arról, hogy rajta kívül bárki meg tudta volna oldani [1]: *Egy H síkbeli halmaz azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy bármely $(k+2)(k+1)/2$ pontjához van k egyenes, mely ezeket a pontokat tartalmazza. Bizonyítandó, hogy van k egyenes, mely a halmaz összes pontját tartalmazza.* Világos, hogy a KöMaL feladata a $k = 10$ esetnek felel meg.

A feladat átfogalmazása. Legyen k egy tetszőleges nemnegatív egész szám, és legyen n egy olyan pozitív egész szám, melyre $n > (k+2)(k+1)/2$. Tekintsünk egy olyan n-elemű ponthalmazt a síkon, mely nem fedhető le k darab egyenessel, de bármely valódi részhalmaza már lefedhető k darab egyenessel. Jelöljön H_k egy ilyen halmazt. Állítjuk: semmilyen k-ra nem létezik ilyen H_k halmaz.

Triviális esetek. A $k = 0$ esetben H_0 olyan legalább 2-elemű halmaz lenne, aminek minden valódi részhalmaza nulla darab egyenessel lenne lefedhető. Ez természetesen lehetetlen. A $k = 1$ esetben H_1 olyan, legalább 4-elemű halmaz, melyben nincs minden pont egyetlen egyenesen, de bármely három már egy-egy egyenesre felfűzhető. Nyilvánvaló itt is a lehetetlenség.

Egy könnyű eset. A $k = 2$ esetben H_2 olyan legalább 7-elemű halmaz, mely nem fedhető le két darab egyenessel, de bármely valódi részhalmaza már igen. Tekintsünk egy olyan ℓ_1 egyenest, amely a lehető legtöbb, nevezetesen n_1 darab pontot tartalmaz a H_2 halmazból, de még azt is tegyük fel, hogy valamely másik egyenessel ℓ_1 a H_2 halmazból $n - 1$ darab pontot lefed. Tekintsünk egy olyan ℓ_2 egyenest is, amely a lehető legtöbb, nevezetesen n_2 darab pontot tartalmaz a $H_2 \backslash \ell_1$ halmazból. Nyilván $n_1 + n_2 = n - 1 \geq 6$ és $n_1 \geq n_2 \geq 2$. Először megvizsgáljuk az $n_2 = 2$ esetet. Ekkor $n_1 = n - 3 \geq 4$. Jelölje P_1 a $H_2 \cap \ell_1$

halmaz egy tetszőleges elemét. Vegyük észre, hogy ekkor a $H_2 \backslash \{P_1\}$ halmaz két egyenessel való lefedéséhez kell egyrészt az ℓ_1 egyenes, másrészt kell egy olyan egyenes is, mely az $\ell_1 \cup \ell_2$ által kihagyott H_2-beli pontot tartalmazza, de ez a két egyenes együtt is csak legfeljebb egy pontot tartalmazhat a $(H_2 \backslash \ell_1) \cap \ell_2$ halmaz két pontja közül. Ez az ellentmondás azt jelenti, hogy $n_1 \geq n_2 \geq 3$. Jelölje P_2 a $(H_2 \backslash \ell_1) \cap \ell_2$ halmaz tetszőleges elemét. Most pedig vegyük észre, hogy ekkor a $H_2 \backslash \{P_2\}$ halmaz két egyenessel való lefedéséhez kell egyrészt az ℓ_1 egyenes, másrészt kell egy olyan egyenes is, mely az $\ell_1 \cup \ell_2$ által kihagyott H_2-beli pontot tartalmazza, de ez a két egyenes együtt is csak legfeljebb egy pontot tartalmazhat a $((H_2 \backslash \ell_1) \cap \ell_2) \backslash \{P_2\}$ halmaz legalább két pontja közül.

A további esetek. A továbbiakban tehát feltehetjük, hogy $k \geq 3$. Ha létezik H_k, akkor világos, hogy minden szóba jövő egyenesnek legalább két pontja H_k-beli. Mivel véges sok ilyen egyenesünk van, ezért felvehetünk egy olyan koordinátarendszert, melyben egyik egyenes sem megy át az origón, ezért mindegyik

egyenes egyenlete $ax + by + 1 = 0$ alakú valamely alkalmas a, b valós számokra. Az összes lehetséges módon vegyünk k darab egyenest, és ezekre tekintsük az $ax+by+1$ polinomok szorzatát. Így olyan $p(x, y)$ polinomokat nyerünk, melyek mindegyike $x^\kappa y^\lambda$ alakú monomok lineáris kombinációja, ahol $\kappa, \lambda \in \{0, 1, ..., k\}$ és $\kappa + \lambda \leq k$. Ilyen monom összesen $(k + 2)(k + 1)/2 < n$ darab van, tehát nem létezhet a $p(x, y)$ alakú polinomokból n darab lineárisan független, tehát n darab ilyen polinom között kell, hogy legyen legalább egy olyan, ami a többiek lineáris kombinációja.

A H_k halmaz tetszőleges Q elemére tekintsük a $H_k \backslash \{Q\}$ halmazt lefedő k darab egyenesre értelmezett $p_Q(x, y)$ polinomot. Van tehát olyan $R \in H_k$ pont, melyre $p_R(x, y)$ lineáris kombinációja a $p_Q(x, y)$, $Q \in H_k \backslash \{R\}$ polinomoknak. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy az R pont koordinátái $x = 1$ és $y = 1$. Tehát $p_R(1, 1) \neq 0$, de $p_Q(1, 1) = 0$, $Q \in H_k \backslash \{R\}$. Ez az ellentmondás mutatja a H_k halmaz létezésének lehetetlenségét.

A fenti bizonyítás kulcsötletét a KöMaL által közölt bizonyításból vettük [3].

Hivatkozások.

[1] Lovász László: Egy kitűzött feladat, Matematikai Lapok 26 (1975) 319. oldal.
http://real-j.mtak.hu/9374

[2] KöMaL: A.814. feladat, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 2021. december.
https://www.komal.hu/feladat?a=honap&h=202112&t=mat&l=hu

[3] KöMaL: Az A.814. feladat megoldása, 2022. január.
https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=A814&l=hu