Haladvány Kiadvány 2022-02-22

Talpponti háromszög és négyzetre emelés

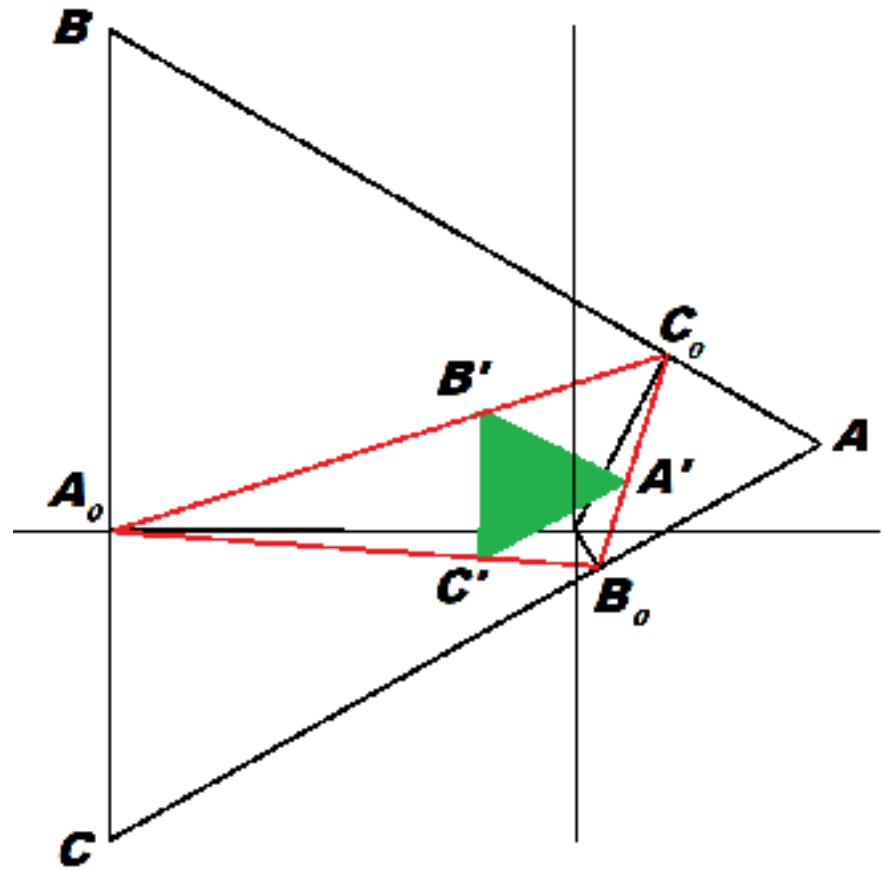
Hujter Mihály

Ajánlás. Ajánljuk ezt az írást Hajdu Endre tiszteletére, aki felkeltette az érdeklődésünket a téma iránt.

Tartalmi összefoglaló. Tekintsünk egy egységnyi területű szabályos háromszöget és annak a belsejében egy pontot, majd a ponthoz tartozó talpponti háromszöget. Egy alkalmas pontból kicsinyítsük le az eredeti szabályos háromszöget úgy, hogy a talpponti háromszögbe beírt háromszöget kapjunk. A kicsi szabályos háromszög területe éppen a négyzete lesz a talpponti háromszögének.

A téma indokoltsága. Az elmúlt évben Hajdu Endre publikált pár állítást, és azok közül néhányra bizonyítást is közölt. Ezen állítások egyike adta a jelen dolgozat indíttatását.

Bevezetés. Tekinsünk a derékszögű koordinátarendszerben egy olyan szabályos háromszöget, melynek a belsejében található az O origó, a területe egységnyi, és az egyik oldala párhuzamos az y-tengellyel és az x-tengelyt annak negatív felén metszi. Jelölje $2u, 2v, 2w$ az origónak az oldalaktól mért távolságát úgy, hogy a $-1/\sqrt{3}$ iránytangensű oldaltól mért távolság legyen $2u$, a $1/\sqrt{3}$ iránytangensű oldaltól mért távolság pedig legyen $2w$. Viviani ismert tételéből tudjuk, hogy a szabályos háromszög területe: $(2u + 2v + 2w)^2 / \sqrt{3}$; tehát $u+v+w = \sqrt[4]{3}/2$.


B
C
A
C_0
B'
A'
A_0
C'
B_0

A szabályos háromszög csúcsait pozitív körüljárás szerint jelölje A, B, C úgy, hogy B és C legyen az $x + 2v = 0$ egyenletű egyenesen. A talpponti háromszögnek a BC oldalon lévő csúcsát jelölje A_0; koordinátázva ez $(-2v; 0)$. A talpponti háromszögnek az AB oldalon lévő csúcsát jelölje C_0; koordinátázva ez $(u; \sqrt{3}u)$. A talpponti háromszögnek a CA oldalon lévő csúcsát jelölje B_0; koordinátázva ez $(w; -\sqrt{3}w)$. Könnyen látható, hogy az $A_0B_0C_0$ talpponti háromszög területe: $\sqrt{3}\,(uv + vw + wu)$. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy a talpponti háromszögbe írható, az eredeti háromszöggel egyállású szabályos háromszög területe éppen ennek a négyzete, azaz $3\,(uv + vw + wu)^2$. A kicsi szabályos háromszög csúcsait jelölje A', B', C' úgy, hogy az A-hoz legközelebbi csúcs A', a B-hez legközelebbi B', a C-hez legközelebbi C'. Az $A'B'C'$ háromszög oldalának hosszát jelölje $2a$.

Számolások. Az A' pont valamely λ, μ pozitív számokra $\lambda + \mu = 1$ mellett felírható $\lambda B_0 + \mu C_0$ alakban; koordinátázva $\left(\lambda w + \mu u; -\sqrt{3}\lambda w + \sqrt{3}\mu u\right)$.

Mivel $B' = A' + (-\sqrt{3}a; a)$, ezért koordinátázva

$$B' = \left(\lambda w + \mu u - \sqrt{3}a \ ; \ -\sqrt{3}\lambda w + \sqrt{3}\mu u + a\right)$$

Ismeretes, hogy három pont, nevezetesen $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$ és $(x_2; y_2)$, akkor van egy egyenesen, ha

$$\det \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Alkalmazzuk ezt az A_0, B', C_0 pontokra:

$$\det \begin{bmatrix} -2v & \lambda w + \mu u - \sqrt{3}a & u \\ 0 & -\sqrt{3}\lambda w + \sqrt{3}\mu u + a & \sqrt{3}u \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Mármost $\lambda + \mu = 1$ miatt leegyszerűsítés után

$$\sqrt{3}\,(uv + vw + wu)\,\lambda = a(2u + v)$$

A jelöléseink szimmetriája révén azt is megkapjuk, hogy

$$\sqrt{3}\,(uv + vw + wu)\,\mu = a(2w + v)$$

A két egyenlet összeadásával $a = \sqrt[4]{3}\,(uv + vw + wu)$, tehát a beírt szabályos háromszög területe valóban

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2 \cdot \sqrt[4]{3}\,(uv + vw + wu)\right)^2 = 3\,(uv + vw + wu)^2$$

Megjegyzések. Könnyen látható, hogy minden olyan szabályos háromszög területe, melybe az $A_0B_0C_0$ háromszög (egybevágósággal) beírható, legfeljebb egységnyi.

Tehát ABC a lehető legnagyobb szabályos háromszög $A_0B_0C_0$ körül. A fentiekből az A' pont pozíciójára vonatkozóan azt is megkaptuk, hogy a B_0C_0 szakaszt $(2w + v) : (2u + v)$ arányban osztja. Szimmetria okán a B' pont a C_0A_0 szakaszt $(2u + w) : (2v + w)$ arányban osztja, és a C' pont a A_0B_0 szakaszt $(2v + u) : (2w + u)$ arányban osztja. Így az $A'B'C'$ háromszög megszerkesztése is könnyen elvégezhető, ha adott az $A_0B_0C_0$ háromszög.

Hivatkozások

2022: História Tudósnaptár: Viviani
https://tudosnaptar.kfki.hu/historia/egyen.php?namenev=viviani

2021: Hajdu E.: A háromszög köré- és beírt szabályos háromszögéről,
Dimenziók : Matematikai Közlemények (Sopron), IX. (2021) pp. 43–50.
http://matematika.emk.uni-sopron.hu/images/Dimenziok/Dimenziok_2021/Dim2021_05.pdf