Haladvány Kiadvány 2022-02-26

Beírt szabályos háromszög minimalizálása

Hujter Mihály

Ajánlás. Ajánljuk ezt az írást Hajdu Endre tiszteletére, aki megkezdte a témakör vizsgálatát.

Tartalmi összefoglaló. Pár hónapja Hajdu Endre kérdezte a háromszögbe beírható legkisebb szabályos háromszöget. Ha minden szög legfeljebb 120°-os, meghatározzuk a legkisebb beírt szabályos háromszög helyzetét, megmutatjuk a szimmetriáit, és kifejezzük a méretét az eredeti háromszög oldalhosszúságaiból. Meghatározzuk továbbá azt is, hányszorosása növekszik a beírt szabályos háromszög mérete, ha a minimálishoz képest 30°-kal elforgatjuk akár balra, akár jobbra.

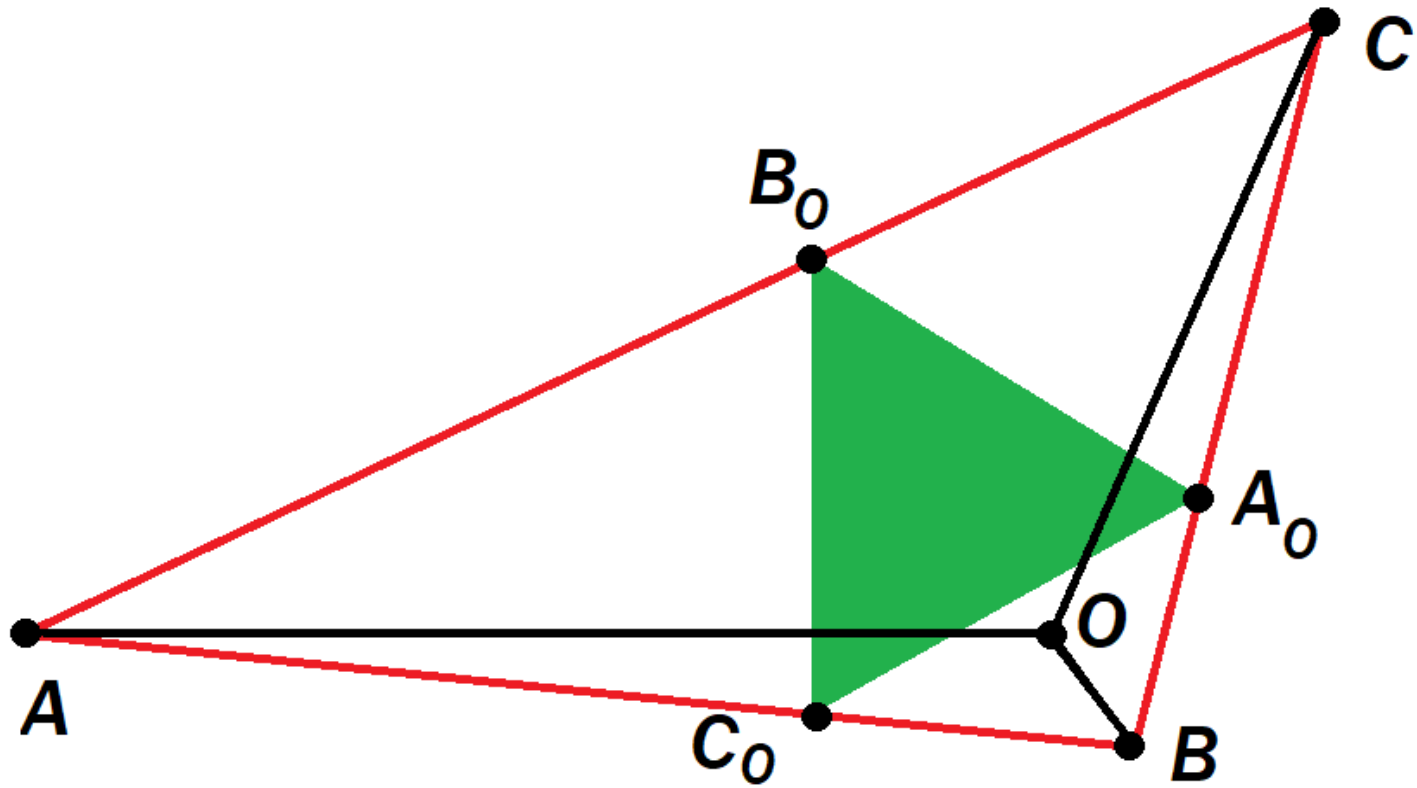
Bevezetés. A szokásos módon jelölje pozitív körüljárás szerint A, B, C egy adott háromszög csúcsait, a, b, c a háromszög oldalainak hosszát. Feltesszük,

hogy a háromszög mindegyik szöge legfeljebb $120°$-os. Jelölje O a háromszög izogonális pontját. A q pozitív számot és az u, v, w nemnegatív számokat úgy választjuk meg, hogy $OA = 2uq$, $OB = 2vq$, $OC = 2wq$ és $u + v + w = \frac{1}{2}$ teljesüljenek. Legyen t egy rögzített valós szám. A BC oldalon úgy vesszük fel az A_t pontot, hogy $BA_t = ((1-t)u + 2v)a$ legyen. A CA oldalon úgy vesszük fel a B_t pontot, hogy $CB_t = ((1-t)v + 2w)b$ legyen. Az AB oldalon úgy vesszük fel a C_t pontot, hogy $AC_t = ((1-t)w + 2u)c$ legyen. Legyen továbbá $h = 2\sqrt{3}\,(uv + vw + wu)\,q$.

Számítások a beírt szabályos háromszögekre. Az ábrán a $t = 0$ eset látható.

Tétel 1. $A_tB_t = B_tC_t = C_tA_t = h\sqrt{1 + \frac{t^2}{3}}$.

Bizonyítás. Felveszünk egy derékszögű koordinátatrenszert, az O pontot az origóval azonosítjuk, és a sík minden P pontját azonosítjuk az $\overrightarrow{OP}$ vektorral. Ha


C
B_0
A_0
O
A
C_0
B

P és Q pontok, akkor $P \cdot Q$ az $\overrightarrow{OP}$ és $\overrightarrow{OQ}$ vektorok skalárszorzatát jelöli, és $P \cdot P$ helyett a P^2 jelölés is használatos, továbbá $\overrightarrow{QP} = P - Q$ hosszát (azaz a vektor abszolút értékét) egyszerűen csak PQ-nak írjuk. Szimmetria okán elég bizonyítanunk, hogy $A_0B_0 = h$. Ha $u > 0$, akkor legyen $U = \frac{1}{u}A$. Ha $v > 0$, akkor legyen $V = \frac{1}{v}B$. Ha $w > 0$, akkor legyen $W = \frac{1}{w}C$. Ha $uvw = 0$, akkor az előbbi definíciókból U, V, W egyike kimarad; ez esetben a kimaradó pontot definiáljuk azáltal, hogy $U + V + W = 0$. Vegyük észre, hogy minden esetben $U^2 = V^2 = W^2 = 4q^2$, $U + V + W = 0$, $U \cdot V = V \cdot W = W \cdot U = -2q^2$. A definíciókból következően

$$\begin{aligned}
& A_t - B_t \\
= \; & (u(1-t) + 2w)vV + (u(1+t) + 2v)w(-U - V) \\
& -(v(1-t) + 2u)w(-U - V) - (v(1+t) + 2w)uU \\
= \; & (1-t)\,(uv + vw + wu)\,V - (1+t)\,(uv + vw + wu)\,U \\
= \; & (uv + vw + wu)\,((1-t)V \; - (1+t)U)
\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}
& (A_tB_t)^2 \\
= \; & (uv+vw+wu)^2\,((1-t)V\ -(1+t)U)^2 \\
= \; & (uv+vw+wu)^2\,((1-t)^2V^2+(1+t)^2U^2-2(1-t^2)V\cdot U) \\
= \; & (uv+vw+wu)^2\,((1-t)^2 4q^2+(1+t)^2 4q^2-2((1-t^2)(-2q^2)) \\
= \; & (uv+vw+wu)^2\,(12+4t^2)q^2=\left(1+\frac{t^2}{3}\right)h^2
\end{aligned}$$

Szimmetria okán ugyanez az eredmény $(B_tC_t)^2$ és $(C_tA_t)^2$ esetében is. ■

Tétel 2. *Az A_0B_0 szakasz merőleges W-re, és hasonlóképpen B_0C_0 merőleges U-ra, C_0A_0 merőleges V-re.*

Bizonyítás. Szimmetria okán elég annyit bizonyítani, hogy $(A_0 - B_0) \cdot W = 0$. Mivel $W = -U - V$, ezért

$$\begin{aligned} & A_0 - B_0 \\ = \; & (u + 2w)vV + (u + 2v)wW - (v + 2u)wW - (v + 2w)uU \\ = \; & (uv + vw + wu)(V - U) \end{aligned}$$

Így elég azt belátni, hogy

$$(V - U) \cdot W = V \cdot W - U \cdot W = \left(-2q^2\right) - (-2q^2) = 0$$

■

Tétel 3a. Az $\overrightarrow{A_1B_1} = B_1 - A_1$ vektor egyirányú a U vektorral, és hasonlóképpen a $\overrightarrow{B_1C_1} = C_1 - B_1$ vektor egyirányú a V vektorral, az $\overrightarrow{C_1A_1} = A_1 - C_1$ vektor egyirányú a W vektorral.

Bizonyítás. Szimmetria okán elég az első állítást bizonyítani. Mármost

$$\begin{aligned} & B_1 - A_1 \\ = \; & 2uwW + (2v + 2w)uU \; - 2wvV - (2u + 2v)wW \\ = \; & 2u(v + w)U - 2vw(V + W) = 2u(v + w)U - 2vw(-U) \\ = \; & 2(uv + vw + wu)U \end{aligned}$$

■

Következmény 1a. A fenti tételek szerint az $A_1B_1C_1$ háromszög úgy kapható meg az $A_0B_0C_0$ háromszögből, hogy az utóbbit balra forgatjuk 30°-kal, és közben az oldalát felnagyítjuk a $\left(2/\sqrt{3}\right)$-szorosára. ■

Tétel 3b. *Az* $\overrightarrow{A_{-1}B_{-1}} = B_{-1} - A_{-1}$ *vektor egyirányú a* $-W$ *vektorral, és hasonlóképpen a* $\overrightarrow{B_{-1}C_{-1}} = C_{-1} - B_{-1}$ *vektor egyirányú a* $-U$ *vektorral, az* $\overrightarrow{C_{-1}A_{-1}} = A_{-1} - C_{-1}$ *vektor egyirányú az* $-V$ *vektorral.*

Bizonyítás. A fordított körüljárású háromszögre vonatkoztatott szimmetria okán. ■

Következmény 1b. A fenti tételek szerint az $A_{-1}B_{-1}C_{-1}$ háromszög úgy kapható meg az $A_0B_0C_0$ háromszögből, hogy az utóbbit jobbra forgatjuk 30°-kal, és közben az oldalát felnagyítjuk a $\left(2/\sqrt{3}\right)$-szorosára. ■

A fenti két következményt úgy is értelmezhetjük, hogy amikor a beírt szabályos háromszög az $A_0B_0C_0$ helyzethez képest akár balra, akár jobbra fordul a derékszög harmadával, akkor a területe pontosan a harmadával növekszik. Mikor a fordulás közben a csúcsok konstans sebességgel mozognak, akkor a területnövekedés mértéke konstans gyorsulás szerinti.

A legkisebb beírt szabályos háromszög mérete az ereteti háromszög oldalaival kifejezve. Közismert tény (megtalálható például Krarup és Roos hivatkozott cikkében is), hogy

$$2(AO + BO + CO)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{12}T$$

ahol T jelenti az ABC háromszög területét. Mármost egyrészt világos, hogy

$$T = 2(uv + vw + wu)q^2 = \frac{hq}{\sqrt{3}}$$

másrészt a Heron-képletből

$$16T^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

Ugyanakkor

$$AO + BO + CO = 2uq + 2vq + 2wq = q$$

Tehát

$$\begin{aligned} & 6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-3(a^4+b^4+c^4)=48T^2 \\ = \quad & 16h^2q^2=8h^2(2q^2)=8h^2(a^2+b^2+c^2+\sqrt{12}T) \end{aligned}$$

Tekintettel arra, hogy miközben t befutja a valós számegyenest, aközben A_t befutja az egész BC egyenest, és minden egyes A_t ponthoz legfeljebb egy beírt szabályos háromszög illeszkedhet. A fentiek alapján megkapjuk tehát a következő tételt:

Tétel 4. *Az a, b, c oldalú ABC háromszögbe beírható legkisebb szabályos háromszög $A_0B_0C_0$, mely oldalának hossza*

$$h=\frac{\sqrt{6}\,T}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+\sqrt{12}\,T}}\,, \quad T=\frac{\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4}}{4}$$

■

Hivatkozások

Krarup, J.; Roos, K.: On the Fermat point of a triangle.
Nieuw Archief voor Wiskunde 5.18 (2017) 280–286.
http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2017/01/5839.pdf

Hajdu E.: A háromszög köré- és beírt szabályos háromszögéről,
Dimenziók : Matematikai Közlemények (Sopron), IX. (2021) pp. 43–50.
http://matematika.emk.uni-sopron.hu/images/Dimenziok/Dimenziok_2021/Dim2021_05.pdf

Hujter M.: Talpponti háromszög és négyzetre emelés.
Haladvány Kiadvány 2022-02-22 (2022) pp. 1–8
http://math.bme.hu/~hujter/220222.pdf