Haladvány Kiadvány 2022-03-16

Háromszög három Simpson-egyenese és hat Simpson-szelője

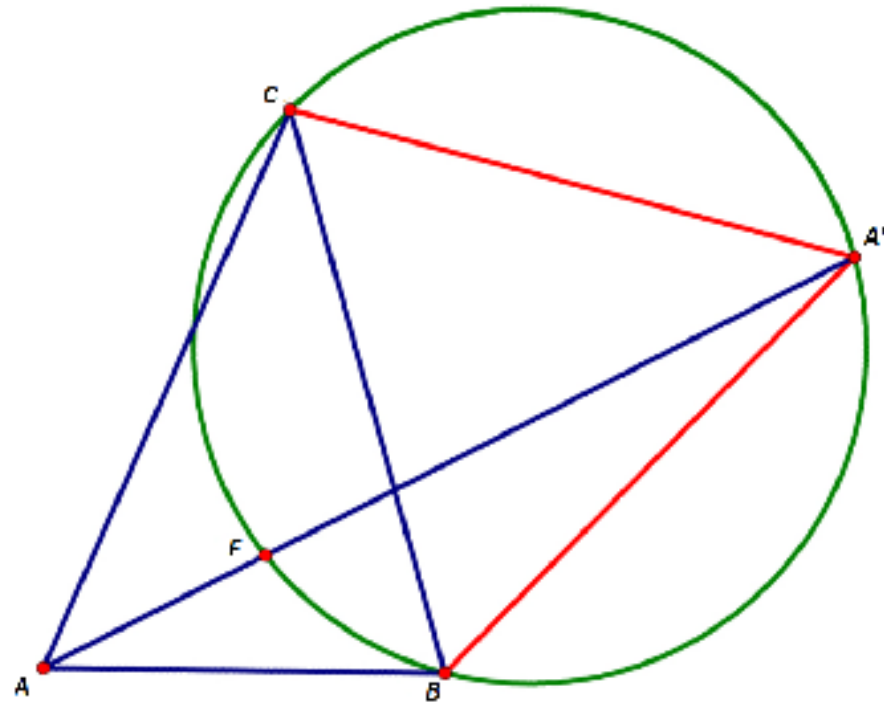
Hujter Mihály

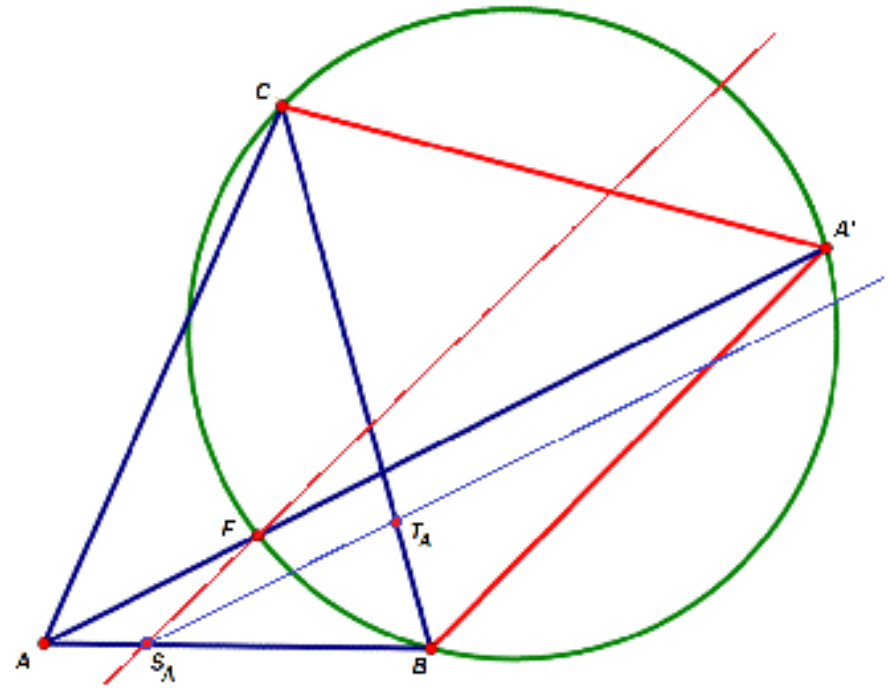
Tartalmi kivonat. A Simpson-egyenesek segítségével definiálunk hat darab szelő szakaszt egy háromszögben. Kiderül, hogy ahhoz hasonlóan, hogy a három Simpson-egyenes hossza egyenlő, a hat darab új szakasz hossza is egyenlő. A hat új szakasz konvex burka egy centrálszimmetrikus konvex hatszög lesz, melynek a legrövidebb átlóit a hat új szakasz adja. Mindhárom Simpson-egyenessel párhuzamos kettő-kettő darab Simpson-szelő. A hatszög területe pontosan akkora, mint annak a szabályos hatszögnek a területe, melynek ugyanakkorák a rövid átlói.

Definíciók. Tekintsünk egy tetszőleges, pozitív körüljárású ABC háromszöget, melyben minden szög 120°-nál kisebb. A beígért hat szakasz közül az elsőt úgy definiáljuk, mint az S_AT_A szakaszt, ahol S_A az AB oldal egyik belső pontja lesz, T_A pedig a BC oldal egyik belső pontja. A definícióhoz szükségünk lesz az úgynevezett Simpson-egyenesre. Először felveszünk egy A' pontot úgy, $A'BC$ egy negatív körüljárású szabályos háromszög legyen. Mármost az AA' egyenest hívják Simpson-egyenesnek. Ennek az egyenesnek az $A'BC$ körüli körrel alkotott, az A'-től különböző metszéspontja lesz F. Könnyen látható, hogy F izogonális pont, azaz

$$AFB\measuredangle = BFC\measuredangle = CFA\measuredangle = 120^\circ$$

Mármost az F-re illeszkedő, az $A'B$ egyenessel párhuzamos egyenesnek és az AB oldalnak a metszéspontja lesz S_A. Az S_A pontra illeszkedő, ás az AA' Simpson-egyenessel párhuzamos egyenes és a BC oldal metszéspontja pedig T_A.


C
A'
F
A
B


C
A'
F
T_A
A
S_A
B

Az AA' Simpson-egyenes hosszát jelölje s, és AF hosszát jelölje ρs, BF hosszát jelölje σs, CF hosszát jelölje τs, ahol ρ, σ, τ alkalmas pozitív számok. Ismert tény, hogy $\rho + \sigma + \tau = 1$.

Komplex számsík. Ebben a szakaszban kiszámítjuk az $S_A T_A$ szakasz hosszát. Ezt t-vel jelöljük. A számításokat komplex számokkal fogjuk elvégezni. Vegyük fel a komlex számsíkot úgy, hogy a nullát helyezzük a F pontra, az A pontot pedig a $-\rho s$ valós számra. Az egyszerűbb képletek érdekében használni fogjuk az $\varepsilon = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ jelölést. Ekkor $B = \sigma s/\varepsilon$ és $C = \tau s \varepsilon$, továbbá $A' = s(\sigma + \tau)$. A párhuzamos szelők tétele miatt $\frac{S_A - F}{B - A'} = \rho$, tehát $S_A = \rho s(\sigma/\varepsilon - \sigma - \tau)$. Mivel $\varepsilon^{-1} - 1 = -\varepsilon$, ezért $S_A = -s\rho(\sigma\varepsilon + \tau)$

Az AA' és a BC egyenesek metszéspontja egy valós szám; jelölje ezt u_A. Nyilván valamely valós λ számra

$$u_A = \lambda B + (1 - \lambda)C = \lambda \sigma s/\varepsilon + (1 - \lambda)\tau s \varepsilon$$

Itt a jobb oldal képzetes része $\sqrt{3}\left(-\lambda\sigma s+(1-\lambda)\tau s\right)/2$, ez is nulla, tehát $\lambda=\frac{\tau}{\sigma+\tau}$. Mindazonáltal $u_A=\frac{\sigma\tau}{\sigma+\tau}s$. A párhuzamos szelők tétele miatt $t=(\sigma+\tau)\left(u_A-A\right)$, tehát $t=s\left(\rho\sigma+\sigma\tau+\tau\rho\right)$. Következésképpen $T_A=S_A+t=-s\rho(\sigma\varepsilon+\tau)+s\left(\rho\sigma+\sigma\tau+\tau\rho\right)=s\sigma\left(\tau+\rho-\varepsilon\rho\right)$. Mármost $1-\varepsilon=-\varepsilon^2$ miatt $T_A=s\sigma\left(\tau-\rho\varepsilon^2\right)$.

További definíciók. Az S_A és T_A pontok mintájára definiálhatjuk az S_B és T_B, illetve az S_C és T_C pontokat is. Először felvesszük a B' illetve C' pontokat úgy, hogy a CAB' illetve ABC' egy-egy negatív körüljárású szabályos háromszög legyen. A CB' egyenessel párhuzamos, F-re illeszkedő egyenes és a BC szakasz metszéspontja lesz S_B, illetve az AC' egyenessel párhuzamos, F-re illeszkedő egyenes és az AB szakasz metszéspontja lesz S_C. Továbbá a BB' egyenessel párhuzamos, S_B-re illeszkedő egyenes és a CA szakasz metszéspontja lest T_B, illetve a CC' egyenessel párhuzamos, S_C-re illeszkedő egyenes és az AB szakasz

metszéspontja lesz T_C. Szimmetria okán ezt a négy új pontot, mint egy-egy komplex számot a következőképpen kaphatjuk meg: S_A-ból úgy kapjuk meg S_B-t, hogy a $-s\rho(\sigma\varepsilon+\tau)$ képletben ρ helyére σ kerül, σ helyére τ kerül, τ helyére ρ kerül, és a végeredmény ε^2-tel szorzódik. Tehát $\varepsilon^3=-1$ miatt $S_B=-s\sigma(\tau\varepsilon+\rho)\varepsilon^2=s\sigma(\tau-\rho\varepsilon^2)$. Hasonló módon kapjuk S_B-ből S_C-t. Tehát $S_C=s\tau(\rho-\sigma\varepsilon^2)\varepsilon^2=s\tau(\rho\varepsilon^2+\sigma\varepsilon)$. Hasonló módon kapjuk T_A-ból T_B-t. Tehát $T_B=s\tau\left(\rho-\sigma\varepsilon^2\right)\varepsilon^2=s\tau\left(\rho\varepsilon^2+\sigma\varepsilon\right)$. Hasonló módon kapjuk T_B-ből T_C-t. Tehát $T_C=s\rho\left(\sigma\varepsilon^2+\tau\varepsilon\right)\varepsilon^2=-s\rho(\sigma\varepsilon+\tau)$. Az áttekinthetőség érdekében táblázatba foglaljuk az eredményeinket:

$S_A=s\rho(-\sigma\varepsilon-\tau)$	$S_B=s\sigma(\tau-\rho\varepsilon^2)$	$S_C=s\tau(\rho\varepsilon^2+\sigma\varepsilon)$
$T_A=s\sigma(\tau-\rho\varepsilon^2)$	$T_B=s\tau(\rho\varepsilon^2+\sigma\varepsilon)$	$T_C=s\rho(-\sigma\varepsilon-\tau)$

Nem meglepő, hogy

$$\begin{aligned} T_B - S_B &= s\tau\left(\rho\varepsilon^2 + \sigma\varepsilon\right) - s\sigma(\tau - \rho\varepsilon^2) = t\varepsilon^2 \\ T_C - S_C &= s\rho(-\sigma\varepsilon - \tau) - s\tau(\rho\varepsilon^2 + \sigma\varepsilon) = -t\varepsilon \end{aligned}$$

Tehát az S_AT_A, az S_BT_B és az S_CT_C szakaszok egyaránt t hosszúságúak. A fenti táblázat alapján: $T_A = S_B$, $T_B = S_C$, $T_C = S_A$. Tehát $S_AS_BS_C$ egy pozitív körüljárású szabályos háromszög t oldalhosszúsággal.

A továbbiakban S_A, S_B, S_C mintájára definiáljuk az S'_A, S'_B, S'_C pontokat. Az S'_A pont úgy definiálódik, mint a CA egyenes és az F-en átmenő, az $A'C$ egyenessel párhuzamos egyenes metszéspontja. Az S_A fenti kiszámításához hasonló módon komplex számként S'_A úgy fejezhető ki, hogy $S'_A = s\rho\left(-\sigma - \tau\varepsilon^2\right)$. Ezután S'_A-ből ugyanúgy képződik S'_B illetve S'_C, ahogyan S_A-ból képződött S_B illetve S_C. Végül ehhez a táblázathoz jutunk:

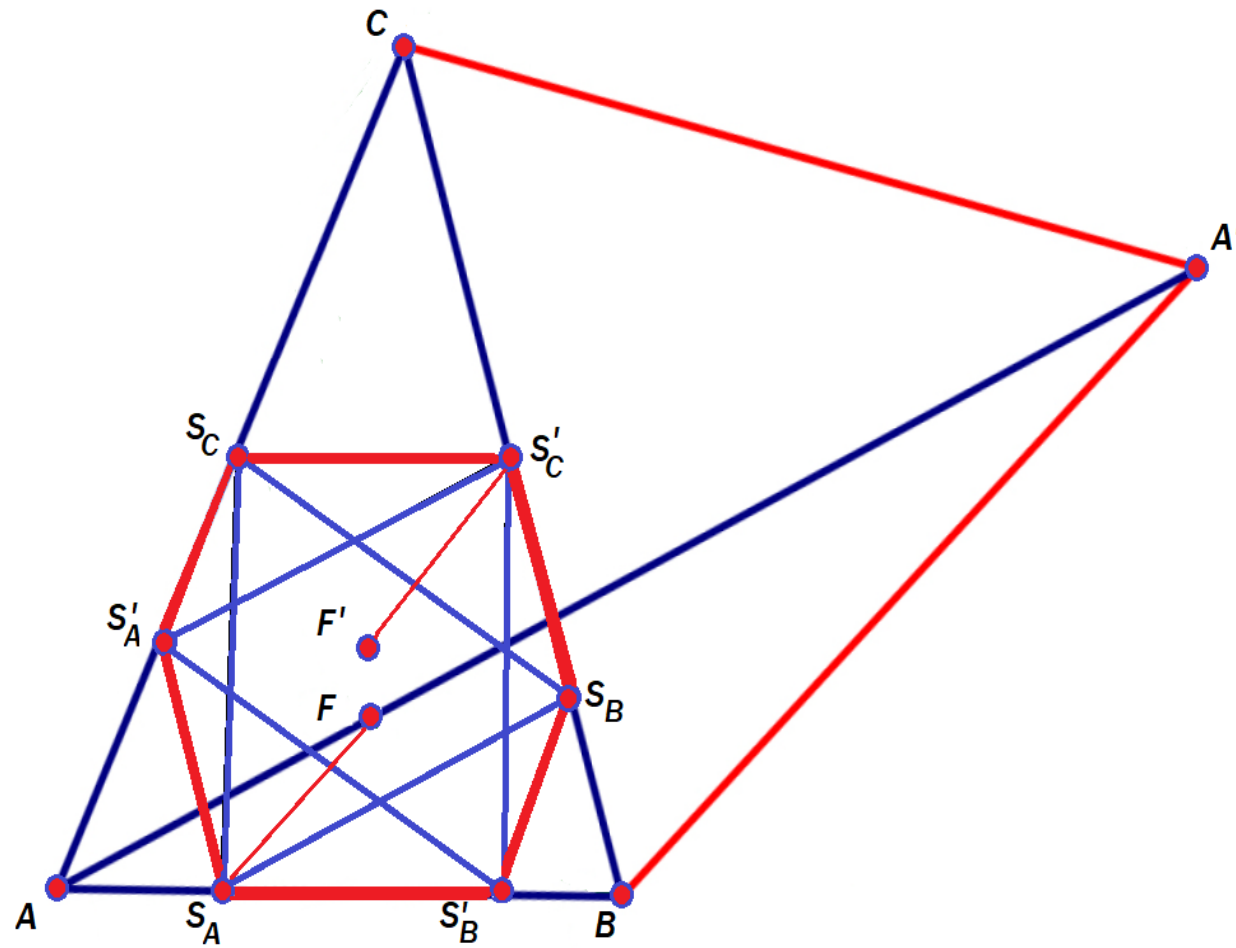
$S'_A = s\rho(-\sigma + \tau\varepsilon^2)$	$S'_B = s\sigma(-\tau\varepsilon^2 - \rho\varepsilon)$	$S'_C = s\tau(\rho\varepsilon + \sigma)$

Nem meglepő, hogy

$$\begin{aligned} S'_B - S'_A &= s\sigma(-\tau\varepsilon^2 - \rho\varepsilon) - s\rho(-\sigma + \tau\varepsilon^2) = -t\varepsilon^2 \\ S'_C - S'_B &= s\tau(\rho\varepsilon + \sigma) - s\sigma(-\tau\varepsilon^2 - \rho\varepsilon) = t\varepsilon \\ S'_A - S'_C &= s\rho(-\sigma + \tau\varepsilon^2) - s\tau(\rho\varepsilon + \sigma) = -t \end{aligned}$$

Tehát $S'_A S'_B S'_C$ is egy pozitív körüljárású szabályos háromszög t oldalhosszúsággal.

Az új hatszög tulajdonságai. Ebben a szakaszban $S_A S'_B S_B S'_C S_C S'_A$ hatszög


C
A'
S_C
S'_C
S'_A
F'
F
S_B
A
S_A
S'_B
B

tulajdonságait vizsgáljuk. Mármost $\rho + \sigma + \tau = 1$ miatt

$$\begin{aligned}
\frac{S_A - A}{B - A} &= \frac{s\rho(-\sigma\varepsilon - \tau) - (-s\rho)}{(s\sigma/\varepsilon) - (-s\rho)} = \rho \\
\frac{S'_A - A}{C - A} &= \frac{s\rho(-\sigma + \tau\varepsilon^2) - (-s\rho)}{(s\tau\varepsilon) - (-s\rho)} = \rho
\end{aligned}$$

Tehát S_A az AB szakaszt, illetve S'_A az AC szakaszt $\rho : (\sigma + \tau)$ arányban osztja. Hasonlóan kapjuk, hogy S_B a BC szakaszt, illetve S'_B a BA szakaszt $\sigma : (\tau + \rho)$ arányban osztja. Hasonlóan, S_C a CA szakaszt, illetve S'_C a CB szakaszt $\tau : (\rho + \sigma)$ arányban osztja. Mivel

$$\begin{aligned}
S_A + S'_C &= s\rho(-\sigma\varepsilon - \tau) + s\tau(\rho\varepsilon + \sigma) = s\left(\sigma\tau - \rho\sigma\varepsilon + \tau\rho\varepsilon^2\right) \\
S_B + S'_A &= s\sigma(\tau - \rho\varepsilon^2) + s\rho(-\sigma + \tau\varepsilon^2) = s\left(\sigma\tau - \rho\sigma\varepsilon + \tau\rho\varepsilon^2\right) \\
S_C + S'_B &= s\tau(\rho\varepsilon^2 + \sigma\varepsilon) + s\sigma(-\tau\varepsilon^2 - \rho\varepsilon) = s\left(\sigma\tau - \rho\sigma\varepsilon + \tau\rho\varepsilon^2\right)
\end{aligned}$$

ezért az $S_A S'_B S_B S'_C S_C S'_A$ hatszög centrálszimmetrikus. A hatszög oldalai váltakozva az ABC háromszög kerületén helyezkednek el, illetve a háromszög oldalaival párhuzamosak. A rövid átlók egyformán t hosszúságúak, és az AA', a BB', illetve a CC' egyenesekkel, azaz a Simpson-egyenesekkel párhuzamosak.

A definíciók alapján az $S_A F$ szakasz 60°-os szöget zár be az AB oldallal, az $S_B F$ szakasz 60°-os szöget zár be a BC oldallal, és az $S_C F$ szakasz 60°-os szöget zár be az CA oldallal. Jelölje F' azt a pontot, melyet a $s\left(\sigma\tau - \rho\sigma\varepsilon + \tau\rho\varepsilon^2\right)$ komplex szám határoz meg. A fentiek alapján az $S'_A F'$ egyenes 60°-os szöget zár be a CB oldallal, az $S'_B F'$ egyenes 60°-os szöget zár be a BC oldallal, és az $S_C F$ szakasz 60°-os szöget zár be az CA oldallal.

Az könnyen látható, hogy az ABC háromszög területe $\frac{\sqrt{3}}{4}st$. Az $AS_A S'_A$ háromszög területe ennek ρ^2-szerese, tehát $\frac{\sqrt{3}}{4}st\rho^2$. Hasonlóképpen a $BS_B S'_B$ három-

szög területe $\frac{\sqrt{3}}{4}st\sigma^2$, a $CS_CS'_C$ háromszög területe$\frac{\sqrt{3}}{4}st\tau^2$. Mivel

$$1 = (\rho + \sigma + \tau)^2 = \rho^2 + \sigma^2 + \tau^2 + \frac{2t}{s}$$

ezért az $S_AS'_BS_BS'_CS_CS'_A$ hatszög területe éppen $\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$. Tehát éppen kétszer akkora, mint az $S_AS_BS_C$ háromszög területe.

Hivatkozások

2022 História Tudósnaptár, Thomas Simpson,

https://tudosnaptar.kfki.hu/historia/egyen.php?namenev=simpson