Haladvány Kiadvány 2022-04-14

Hatvanhat fok kotangense

Hujter Mihály hujter.misi@gmail.com

Ajánlás. Barátunk tiszteletére, akinek a hatvanhatodik születésnapja közeledik.

Tartalmi összefoglaló. A jelen dolgozat egyik célja, hogy 66° kotangensére egy precíz, de kissé bonyolultnak látszó összefüggést bizonyítson. A másik cél, hogy további érdekes összefüggéseket soroljon fel ugyanerre a hegyesszögre vonatkozóan. Ez utóbbiak bizonyítását azonban már az olvasóra bízzuk.

Hatvanhat fok kotangensének pontos értéke.

$$\cot 66^\circ = \sqrt{23+\sqrt{500}-\sqrt{1020+\sqrt{1039680}}}$$

Megjegyzés. Kissé hosszadalmas, de csak elemi műveleteket igényel, hogy a fenti bonyolult képlet reciprokát kiszámítsuk, és megkapjuk, hogy

$$\tan 66^\circ = \sqrt{7 - \sqrt{20} + \sqrt{60 - \sqrt{2880}}}$$

Felhasználandó jólismert összefüggések. A következő összefüggések közismertek, bizonyításukkal együtt könnyen fellehetők az interneten:

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x &= \cos 2x + 1 \\ 4\cos^3 x &= \cos 3x + 3\cos x \\ 8\cos^4 x &= \cos 4x + 8\cos^2 x - 1 \\ 16\cos^5 x &= \cos 5x + 20\cos^3 x - 5\cos x \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőséget $x = 36^\circ$-ra alkalmazva megkapjuk, hogy $4\cos 36^\circ = 1+\sqrt{5}$. Ebből $4\sin 36^\circ = \sqrt{10-\sqrt{20}}$.

Hatvanhat fok koszinuszának és szinuszának pontos értéke. Az ismert addíciós képletekből:

$$\begin{aligned}\cos 66^\circ &= \cos(30^\circ+36^\circ) = \cos 30^\circ \cos 36^\circ - \sin 30^\circ \sin 36^\circ \\ \sin 66^\circ &= \sin(30^\circ+36^\circ) = \sin 30^\circ \cos 36^\circ + \cos 30^\circ \sin 36^\circ\end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}8\cos 66^\circ &= \sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{10-\sqrt{20}} \\ 8\sin 66^\circ &= 1+\sqrt{5}+\sqrt{30-\sqrt{180}}\end{aligned}$$

Hatvanhat fok kotangense képletének bizonyítása. A fentiek szerint azt kell igazolnunk, hogy

$$1+\sqrt{5}+\sqrt{30-\sqrt{180}}$$

és

$$\sqrt{23+\sqrt{500}-\sqrt{1020+\sqrt{1039680}}}$$

szozata éppen

$$\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{10-\sqrt{20}}$$

Mármost

$$\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{30-\sqrt{180}}\right)^2\left(23+\sqrt{500}-\sqrt{1020+\sqrt{1039680}}\right)$$
$$-\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{10-\sqrt{20}}\right)^2=0 \qquad \blacksquare$$

További érdekes képletek hatvanhat fokra vonatkozóan.

$$\begin{aligned}\sin 66^\circ &= 4\cos 8^\circ \sin 22^\circ \sin 38^\circ\\ \cos 66^\circ &= 4\sin 8^\circ \cos 22^\circ \cos 38^\circ\\ \tan 66^\circ &= \tan 72^\circ - \tan 36^\circ - \tan 6^\circ\end{aligned}$$

$$\tan 66^\circ = \frac{\cos 21^\circ + \sin 21^\circ}{\cos 21^\circ - \sin 21^\circ} = \frac{\sin 44^\circ + \sin 88^\circ}{\cos 44^\circ + \cos 88^\circ} = \frac{\cos 68^\circ + \sin 70^\circ}{\sin 68^\circ - \cos 70^\circ}$$

$$\tan 42^\circ = \frac{\sin 18^\circ + \sin 66^\circ}{\cos 18^\circ + \cos 66^\circ} \qquad \cot 33^\circ = \frac{\sin 48^\circ + \sin 66^\circ}{\cos 48^\circ + \cos 66^\circ}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos 66^\circ} &= \sqrt{8 - \sqrt{20} + \sqrt{60 - \sqrt{2880}}} \\ \frac{1}{\sin 66^\circ} &= \sqrt{15 + \sqrt{180}} - \sqrt{5} - 2 \end{aligned}$$

$$\sin 66^\circ = \sin 6^\circ + \sin 30^\circ - \sin 42^\circ + \sin 78^\circ$$