Haladvány Kiadvány 2022-04-22

Kitérő egyenesek távolsága

Hujter Mihály `hujter.misi@gmail.com`

Tartalmi összefoglaló. Egy mérnök képletet keres két kitérő egyenes távolságára, de nem talál. Rábukkan viszont egy olyan formulára, mely egy pont és egy térbeli egyenes távolságát számítja ki. Jobb ötlet híján a mérnök az e egyenesen felveszi a P_1, P_2, P_3 különböző pontokat úgy, hogy $P_1P_2 = P_2P_3$ teljesüljön, és d_j-vel jelölve P_j és f távolságát minimalizálja a

$$g(t) = (d_1^2 - 2d_2^2 + d_3^2)t^2 + \left(d_3^2 - d_1^2\right)t + 2d_2^2$$

függvényt. A mérnök szerint a minimum felének négyzetgyöke lesz e és f távolsága. Bizonyítsuk, ha helyes a módszer, illetve mutassunk rá, ha helytelen!

A módszer ellenőrzése. Az xyz derékszögű koordinátarendszerben az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy az f egyenes a z-tengely, a P_j pont koordinátái $(x_j; y_j; z_j)$, $j = 1, 2, 3$, és hogy $x_2 = y_2 = 1$. Tehát $d_2 = \sqrt{2}$. Mivel $P_1P_2 = P_2P_3$, ezért $x_1 + x_3 = y_1 + y_3 = 2$.

Mivel $x_1 = 1$ és $y_1 = 1$ egyszerre nem állhat fenn, hiszen e és f kitérő egyenesek, az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $x_1 \neq 1$. Az xy síkon az $(x_j; y_j)$, $j = 1, 2, 3$, pontokon átmenő egyenes egyenlete:

$$y = \frac{(y_1 - 1)\,x + x_1 - y_1}{x_1 - 1}$$

Tehát az xy síkon ezen egyenes egy tetszőleges $(x; y)$ pontjának az origótól mért távolságnégyzete:

$$x^2 + \left(\frac{(y_1 - 1)\,x + x_1 - y_1}{x_1 - 1}\right)^2$$

Az x függvényeként tekintve a fentit, annak a minimuma a következő:

$$\frac{(x_1 - y_1)^2}{(x_1 - 1)^2 + (y_1 - 1)^2}$$

Figyelembe véve, hogy $d_1^2 = x_1^2 + y_1^2$, $d_2^2 = 2$ és $d_3^2 = (2 - x_1)^2 + (2 - y_1)^2$, a fenti $g(t)$ függvény minimuma:

$$\frac{2\,(x_1 - y_1)^2}{(x_1 - 1)^2 + (y_1 - 1)^2}$$

Ezzel beláttuk, hogy a mérnök módszere helyes.

Megjegyzés. A fentiekből látható, hogy e és f távolsága képlettel is meghatározható

a d_1, d_2, d_3 számokból:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\left(4d_2^2 - (d_1 - d_3)^2\right)\left(-4d_2^2 + (d_1 + d_3)^2\right)}{d_1^2 - 2d_2^2 + d_3^2}}$$

$$= \sqrt{d_2^2 - \frac{\left(d_1^2 - d_3^2\right)^2}{8\left(d_1^2 - 2d_2^2 + d_3^2\right)}}$$

Ezt a képletet úgy kaptuk meg, hogy kiszámítottuk a $g(t)$ függvény deriváltját t szerint, és azt kaptuk, hogy

$$g'(t) = 2\left(d_1^2 - 2d_2^2 + d_3^2\right)t + d_3^2 - d_1^2$$

Mármost a $g'(t) = 0$ egyenlet megoldása:

$$t_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1^2 - d_3^2}{d_1^2 - 2d_2^2 + d_3^2}$$

Mindazonáltal

$$\begin{aligned}
& 4 \cdot g(t_0) \cdot \left(d_1^2 - 2d_2^2 + d_3^2\right) \\
= \; & -d_1^4 - 16d_2^4 - d_3^4 + 8d_1^2d_2^2 + 2d_1^2d_3^2 + 8d_2^2d_3^2 \\
= \; & \left(4d_2^2 - (d_1 - d_3)^2\right)\left(-4d_2^2 + (d_1 + d_3)^2\right) \\
= \; & 8d_2^2\left(d_1^2 - 2d_2^2 + d_3^2\right) - \left(d_1^2 - d_3^2\right)^2
\end{aligned}$$

Eláruljuk még, hogy a $g(t)$ függvény úgy készült, hogy $g(-1) = 2d_1^2$, $g(0) = 2d_2^2$ és $g(1) = 2d_3^2$ teljesüljenek.

Egy tetraéder kitérő éleinek távolsága. Egy $A_1A_2A_3A_4$ teraédernél jelölje h_{jkm} az $A_jA_kA_m$ lapon az A_m csúcsból induló magasságvonal hosszát, és jelölje λ_{jkm} az $A_jA_kA_m^{[n]}$ háromszögben az $A_m^{[n]}$ csúcsból induló magasságvonal hosszát, ahol az $A_m^{[n]}$ ponton az A_mA_n szakasz felezőpontját értjük, ahol $j+k+m+n=10$. Ekkor a fentiek alapján az A_1A_2 és az A_3A_4 egyenesek távolsága négyzetét fel tudjuk írni:

$$\Lambda_{123} = \lambda_{123}^2 - \frac{\left(h_{123}^2 - h_{124}^2\right)^2}{8\left(h_{123}^2 - 2\lambda_{123}^2 + h_{124}^2\right)}$$

Az indexek permutálása révén formailag a h_{jkm}, λ_{jkm}, Λ_{jkm} képletek mindegyike 24-féle módon írható fel, de a h_{jkm} képletek 12-féle értéket vehetnek fel, a λ_{jkm} képletek 6-féle értéket vehetnek fel, a Λ_{jkm} képletek pedig 3-féle értéket vehetnek fel.