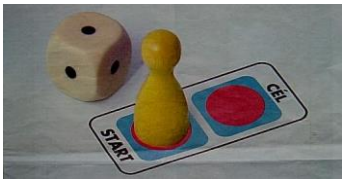
Haladvány Kiadvány, 2022.
http://math.bme.hu/~hujter/220619.pdf
http://math.bme.hu/~hujter/halad.htm



Mesék a valószínűségszámításból

Megoldások

Szalkai István, Veszprém
szalkai@almos.uni-pannon.hu

Jelen összeállításunkban a nemrég megjelent [SzI 2022] feladatgyűjteményünk mind a 83 feladatának részletes megoldását tesszük közkinccsé. Minden észrevételt (hibák, elírások), sőt újabb feladatjavaslatokat is köszönettel fogad a szerző. (Sajnos, a Szövegszerkesztők fejlődésének köszönhetően legtöbb képletnél nélkülöznünk kellett a Word képletszerkesztőjét.)

Veszprém, 2022.06.19.

Tartalom:

Megoldások **2.o.**

Eseményalgebra, elemi feladatok 2.o.
Geometriai valószínűség 8.o.
Bayes tétele 10.o.
Függetlenség 14.o.
Diszkrét eloszlások 17.o.
Poisson eloszlás 21.o.
Folytonos eloszlások 21.o.
Exponenciális eloszlás 22.o.
Normális eloszlás 23.o.
Centrális határeloszlás 24.o.
Irodalom 27.o.

Megoldások

Eseményalgebra, elemi feladatok

(E1) a) "van víz a kádban", "langyos a víz"
b) $A\cdot B^-$ azaz $A\cap B^-$ (komplementer), $A+B$ azaz AUB, $(A^-)\cdot(B^-)$ azaz $(A^-)\cap(B^-)$ vagy $(A+B)^-$ azaz $(AUB)^-$, $A\cdot B$ azaz $A\cap B$.

(E2) Disznó = (A hibáz)és(B hibáz)és(C hibáz), tehát $P(D) = (1-P(A))\cdot(1-P(B))\cdot(1-P(C)) =$
$= (1-0{,}7)\cdot(1-0{,}5)\cdot(1-0{,}9) =$ **0,015** = 1,5% .

(E3) P(egyiket elfogadják) = 1 - P(mindkettőt elutasítják) = $1-0{,}4\cdot0{,}4 =$ **0,84** = 84% .
Más megoldás: Legyen B_1 := első helyen sikerül, B_2 := második helyen sikerül, ekkor
$P(B_1) = P(B_2) = 1-0{,}4 = 0{,}6$, $P(B_1\cap B_2) = P(B_1)\cdot P(B_2) = 0{,}6^2 = 0{,}36$, és

$$P(B_1UB_2) = P(B_1)+P(B)-P(A\cap B) = 0{,}6+0{,}6-0{,}36 = 1{,}2-0{,}36 = \mathbf{0{,}84} = 84\% .$$

(E4) Legyen ξ:="két kocka összege". Ekkor "ξ=2" = "1+1" és "ξ=12" = "6+6" , vagyis
$P(\xi=2) = P(\xi=12) =$ **1/36** $\approx 0{,}0277 \approx 2{,}77\%$, míg például "ξ=6" = "1+5"v"2+4"v"3+3"v v"4+2"v"5+1" , vagyis $P(\xi=6) =$ **5/36** $\approx 0{,}1388 \approx 13{,}88\%$.

(E5) a) P(azonos neműek) = P(fiú,fiú)+P(leány,leány) = P(fiú)·P(fiú) + P(leány)·P(leány) =
$= p\cdot p+q\cdot q = 0{,}51^2+0{,}49^2 = 0{,}2601 + 0{,}2401 =$ **0,5002** ,
P(különböző neműek) = 1 - P(azonos neműek) = 1-0,5002 = **0,4998** .
Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az azonos nemű gyerekek valószínűsége a $(p-q)^2 > 0$ egyenlőtlenség miatt, és nem az apa miatt nagyobb, tetszőleges $p \neq ½$ esetén.

b) P(azonos neműek) = P(fiú,fiú,fiú)+P(leány,leány,leány) =
= P(fiú)·P(fiú)·P(fiú)+P(leány)·P(leány)·P(leány) = $p\cdot p\cdot p+q\cdot q\cdot q = 0{,}51^3+0{,}49^3 =$ **0,2503** ,
P(két fiú és egy lány) = P(fiú,fiú,leány) + P(fiú,leány,fiú) + +P(leány,fiú,fiú) = $3\cdot p\cdot p\cdot q =$
$3\cdot 0.51^2\cdot 0.49 =$ **0,382347** ,
P(egy fiú és két lány) = P(fiú,leány,leány) + P(leány,fiú,leány) + +P(leány,leány,fiú) =
$3\cdot p\cdot p\cdot q = 3\cdot 0.51^2\cdot 0.49 = 3\cdot 0{,}51\cdot 0{,}49\cdot 0{,}49 =$ **0,367353** .
(Ellenőrzés: 0,2503+0,382347+0,367353 = 1 .)

(E6) a) P(3 fej vagy 3 írás) = P(3 fej) + P(3 írás) = $p^3 + (1-p)^3 = 1/2$ (pontos érték!) .
b) P(egy fej és egy írás) = P(fej,írás)+P(írás,fej) = $2\cdot p\cdot(1-p) = 1/3$ (pontos érték!) .
Megjegyzés: Vegyük észre, hogy $P(a)= ½$ és $P(b)= {}^1/_3$ miatt a fabatka egymaga helyettesíthet mind egy normális ${}^1/_2$, mind egy ${}^1/_3$ esésű érmét is! (Ld. még [1993] és [1995b].)

(E7) Egy szelvény kitöltéseinek összes lehetséges száma

֍ = ("90 alatt 5") = $(90\cdot89\cdot88\cdot87\cdot86)/5! = 43\,949\,268$,

P(egy szelvény ötös) = $1/\text{֍} \approx 2.2754\times10^{-8} = 0{,}000\,000\,022\,754$,

P(egy szelvény *nem* ötös) = $1-1/\text{֍} \approx 0{,}999\,999\,977\,246$,

P(2 millió szelvény *nem* ötös) = $(1-1/\text{֍})^{2.000.000} \approx 0.955511957950999 \approx 95{,}5\%$,

P(20 héten át 2 millió szelvény *nem* ötös) = $[(1-1/\text{֍})^{2.000.000}]^{20} \approx 0.402459821142396 \approx 40\%$,

P(20 hét alatt *van* ötös) = $1 - [(1-1/\text{֍})^{2.000.000}]^{20} \approx 0.597540178857604 \approx 60\%$.

(E8) Ha az állatok között *fertőzés* terjed, akkor a megfertőződés folyamatát is vizsgálnunk kellene, ami nagyon bonyolult. Tehát azt kell feltételeznünk, hogy az egyes állatok megbetegedései *függetlenek*. Ez esetben a megbetegedett állatok száma, ξ_n , Bernuolli (binomiális) eloszlás (ahol *n* az állatok összes száma) :

$P(\xi_{20}\leq 2) = P(\xi_{20}=0)+P(\xi_{20}=1)+P(\xi_{20}=2) =$

$$\binom{20}{0}\cdot 0.1^0\cdot 0.9^{20}+\binom{20}{1}\cdot 0.1^1\cdot 0.9^{19}+\binom{20}{2}\cdot 0.1^2\cdot 0.9^{18} \approx \mathbf{0{,}6769} \approx 67{,}7\ \%\ ,$$

$P(\xi_{10}\leq 1) = P(\xi_{10}=0)+P(\xi_{10}=1) =$

$$\binom{10}{0}\cdot 0.1^0\cdot 0.9^{10}+\binom{10}{1}\cdot 0.1^1\cdot 0.9^{9} \approx \mathbf{0{,}7360} \approx 73{,}61\ \%\ .$$

Megjegyzés: Nagyobb *n* értékekre a feladat (természetesen) még mindig Bernuolli eloszlás, azonban kiszámítása már csak a *Központi határeloszlás tétel* (KHT vagy CHT) segítségével lehetséges. Egy részletesen kidolgozott megoldást találunk az [SzI 2021] könyvecske 10.7. Mintafeladatában.

(E9) a) A második személynek máskor van a születésnapja, mint az elsőnek (364/365), a harmadiknak nem lehet ugyanakkor, mint az első kettőnek (363/365), és így tovább:

P(*négy ember különböző*) = 364/365 · 363/365 · 362/365 = (364·363·362)/365^3 =
= 47 831 784 / 48 627 125 ≈ **0.983 64** ≈ 98%

b) P(egy adott napon születtek mindhárman) = $1/365^3$, de ez bármelyik nap lehet, tehát

P(feladat) = $365/365^3 = 1/133\ 225 \approx \mathbf{7{,}5061\times 10^{-6}} \approx 0.000\ 007\ 506\ 1 \approx 0\%$

(az újságcikkben szereplő "1 *a* 133 *ezerhez*" becslés helyes.)

c) Az a) feladathoz hasonlóan

P(23 *ember különböző*) = 364/365 · 363/365 · ... · 343/365 ≈ 0.492 703 ≈ 49% ,

tehát P(23 *ember van azonos*) ≈ 1-0.492 703 ≈ **0.507 298** ≈ 51 % , ami több 50% nál !

d) Az a) feladathoz hasonlóan: olyan *n* -et kell keresnünk, amelyre

P(*n ember különböző*) = 364/365 · 363/365 · ... · (365-*n*+1)/365 < 0,01 .

n -et próbálgatással is megkereshetjük, vagy [wiki-Szul] -ban elolvashatjuk Halmos Pál megoldását, vagy [SzG] általános megoldását. Az eredmény: $\mathbf{55 \leq n}$.

Megjegyzések: 68 személy esetén már 99,9% biztonsággal állíthatjuk, hogy van két azonos napon született jelenlevő.

(E10) Egy húzás a gyermekek sorba állítása, vagyis permutációja, tehát *n* gyermek esetén az összes húzási lehetőségek száma *n*! . Ha nem kell megismételni a sorsolást, akkor a gyermekek olyan sorrendjét kaptuk,amikor senki sincs az eredeti helyén. Ezeket a sorrendeket a szakirodalomban *fixpont nélküli permutációknak* vagy inkább *elcserélt levelek/kalapok problémájának* (the hatcheck problem, derangements, problème des rencontres, pr. de Montmort, stb.) hívják, és számuk, az ún. *szubfaktoriális*

$$D_n := n!\cdot\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$$

Így a keresett valószínűség P(*n*) = 1 - $D_n/n!$. Könnyen látható, hogy $n\to\infty$ esetén $D_n/n! \to 1/e \approx 0{,}368$, vagyis P(*n*) → $1/e \approx \mathbf{0{,}632}$.

Megjegyzések: A problémát és megoldását részletesen tárgyalja a Szerző [SzI 2006] könyve és [SzI 1991] feladatgyűjteménye, Székely Gábor [SzG] könyvének "ajándékozási paradoxon" fejezete, valamint a Wikipédia sok oldala: [wiki-Szub].

Már $6 \le n$ esetén $P(n)$ négy tizedesjegy pontossággal megközelíti $1-1/e \approx 0{,}6321$ értékét!

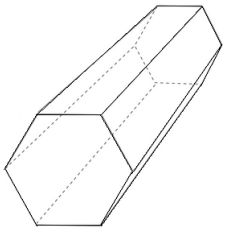
Paradox módon n növekedésével lényegesen nagyobb annak a valószínűsége, hogy lesz valaki, aki visszakapja a saját ajándékát, mint annak a valószínűsége, hogy senki sem kapja vissza. Egyedül $n=2$ esetén 50-50% ez a két valószínűség.

A feladat és megoldása megjelent a KöMaL újságban is 1999-ben, lásd
https://www.komal.hu/verseny/1999-12/mat.h.shtml ,
https://www.komal.hu/verseny/1999-12/B.h.shtml .

A *rencontres* elnevezés egy pasziánsz kártyajáték neve: a két azonos (piros és kék hátú) kártyapakli lapjait megkeverve, véletlenszerűen rakjuk két sorban egymás alá, az azonos, egymás alatt levő lapokat eltávolítjuk, és megszámoljuk, hány pár maradt ... .

Elcserélt kalapok a ruhatárban fordulhatnak elő: a beadott kalapok véletlenszerű kiosztása esetén hány százalékban kapja vissza legalább egy valaki a sajátját. Ezt a problémát általánosította Joó István [JI 1993] cikkében: ha a ruhatárba többféle ruhadarabot is beadunk ... .

(E11) A legegyszerűbb ilyen test egy szabályos n -oldalú hasáb, amelynek alap- és fedőlapja egy szabályos n -szög. Ezt guríthatjuk az asztalon, mint egy ceruzát.



Páros n -re készíthetünk még két darab, alaplapjával szembefordított, szabályos $n/2$ -oldalú sokszög alapú gúlát is.

Amennyiben egy henger alakú ceruza kerületére írjuk a 0 és 1 közötti valós számokat, akkor ezt gurítva az $x \in [0,1]$ valós számok véletlen, egyenletes eloszlását tudjuk kísérletileg előállítani.

Lásd még:
https://**de**.wikipedia.org/wiki/Spielwürfel
https://**hu**.wikipedia.org/wiki/Dobókocka
https://**en**.wikipedia.org/wiki/Sicherman_dice
https://**en**.wikipedia.org/wiki/Dice
https://**fr**.wikipedia.org/wiki/Dé
https://**it**.wikipedia.org/wiki/Dado_(gioco)
https://fr.wikipedia.org/wiki/Sevivon (Sevivon = Hanuka pörgettyű = angol Dreidel)
https://en.wikipedia.org/wiki/Dreidel

(E12) a) A+B azaz AUB, $P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B) = 0{,}9+0{,}6-0{,}55 = \mathbf{0{,}95} = 95\%$.

b) A^-+B^- azaz $A^- \cup B^-$ (tagadás) vagy $(A \cdot B)^-$ azaz $(A \cap B)^-$ (De Morgan azonosság),
$P((A \cap B)^-) = 1-P(A \cap B) = 1-0{,}55 = \mathbf{0{,}45} = 45\%$.

c) $A^- \cdot B^-$ azaz $A^- \cap B^-$, de nem függetlenek, ezért inkább: $(A \cup B)^-$ (De Morgan azonosság), tehát $P((A \cup B)^-) = 1-P(A \cup B) = 1-0{,}95 = \mathbf{0{,}05} = 5\%$ (az a) feladat szerint).

d) Ez a "*szimmetrikus különbség* " : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, tehát
$P(A \Delta B) = P(A)-P(A \cap B) + P(B)-P(A \cap B) = 0{,}9+0{,}6-2 \cdot 0{,}55 = \mathbf{0{,}40} = 40\%$,
vagy:
$P(A \Delta B) = P(A \cup B)-P(A \cap B) = 0{,}95-0{,}55 = 0{,}40 = 95\%$.

(E13) a) $P(A^- \cap B^-) = (1-0{,}01) \cdot (1-0{,}03) = 0{,}99 \cdot 0{,}97 = \mathbf{0{,}9603} \approx 96\%$,
b) $1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}01 \cdot 0{,}03 = 1-0.0003 = \mathbf{0.9997} \approx 100\%$,
c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}01 + 0{,}03 - 0{,}01 \cdot 0{,}03 = \mathbf{0.0397} \approx 4\%$,

vagy másként: P(c) = 1-P(a) = 1 - 0,9603 = 0,0397

d) P(AΔB) (*szimmetrikus különbség*) = P(A\B)+P(B\A) = P(A)-P(A∩B) + P(B)- P(A∩B) =
= 0,01 - 0,01·0,03 + 0,03 - 0,01·0,03 = 0,04 - 2·0,01·0,03 = **0.0394** ≈ 4% ,
vagy másként: P(AΔB) = P(AUB) - P(A∩B) = 0,0397 - 0,01·0,03 = 0,0394 ,

(E14) Mind a négy autó Jobbra vagy Egyenesen megy, tehát az összes eset $2^4 = 16$ lehetőség. "Rossz" sorrendek azok, amikor (legalább) két autó kíván *egymás után* Jobbra kanyarodni. Ebből következik, hogy legfeljebb kettő autó mehet egyáltalában Jobbra. Tehát a lehetséges **jó** sorrendek (zárójelben a valószínűségek): EEEE ($=0{,}6^4$), JEEE, EJEE, EEJE, EEEJ ($=4\cdot0{,}6^3\cdot0{,}4^1$), JEJE, JEEJ, EJEJ ($3\cdot0{,}6^2\cdot0{,}4^2$), összesen **0,648** = 64,8% .
Ellenőrzés: A lehetséges rossz sorrendek: JJJJ ($=0{,}4^4$), JJJE, JJEJ, JEJJ, EJJJ ($=4\cdot0{,}4^3\cdot0{,}6^1$), JJEE, EJJE, EEJJ ($=4\cdot0{,}4^3\cdot0{,}6^1$), összesen: 0,352=35,2% , és felsoroltuk az összes 2^4 esetet.
Megjegyzés: Érdekes lenne a feladatot általában *n* autóra megvizsgálni.

(E15*)** A feladat részletes (nehéz) megoldása Székely Gábor [SzG] könyvének 165-167. oldalain található "családnév kihalási paradoxon" címmel.

(E16) $0{,}93^{100} \approx 0{,}0007052 \approx 0{,}07\ \% \approx 0{,}7\ ‰$. Nagyon veszélyes mutatvány !!!

(E17) a) Én éjfél előtt születtem, ikertestvérem éjfél után.
b) Én február 28-án születtem éjfél előtt, ikertestvérem másnap hajnalban, március 1-én. Most szökőév van! **c)** azonos b) -vel.
d) Én 1992 -ben, szökőévben születtem a *Kiribati Köztársaság* Line Islands egyik szigetén, születésem után anyám ágyát áttolták a dátumválasztó vonalon (a többit már tudjátok).
https://**hu**.wikipedia.org/wiki/Kiribati , https://**en**.wikipedia.org/wiki/Kiribati
https://**hu**.wikipedia.org/wiki/Nemzetközi_dátumválasztó_vonal
e) Ilyesmiről én nem hallottam.

(E18) a) P(kettő azonos) = $\mathbf{3/3^2} = 3/9 = 1/3 \approx 0{,}333$.
b) Ha hárman játszanak, akkor a lehetőségek száma 3^3. Körbeverés esetén három különbözőt mutatnak, de ezt 3! -féle képpen tehetik meg. Tehát P(körbeverés) = $\mathbf{3!/3^3} = 2/9 \approx 0{,}222$.

Megjegyzés: A következő megfogalmazás is ugyanez a probléma:
c) *n* tárgyat teszek véletlenszerűen *n* dobozba, mekkora valószínűséggel lesz mindegyik dobozban pontosan egy tárgy? (Megoldás: $P = n!/n^n$.)
Hasonló problémákat tárggyal még az (E9) feladat is.

(E19) a) Az alábbi táblázatok alapján:

A\B	2	3	4	15	16	17
5	A	A	A	B	B	B
7	A	A	A	B	B	B
8	A	A	A	B	B	B
9	A	A	A	B	B	B
10	A	A	A	B	B	B
18	A	A	A	A	A	A

P(A>B) = 21/36

B\C	1	6	11	12	13	14
2	B	C	C	C	C	C
3	B	C	C	C	C	C
4	B	C	C	C	C	C
15	B	B	B	B	B	B
16	B	B	B	B	B	B
17	B	B	B	B	B	B

P(B>C) = 21/36

C\A	5	7	8	9	10	18
1	A	A	A	A	A	A
6	C	A	A	A	A	A
11	C	C	C	C	C	A
12	C	C	C	C	C	A
13	C	C	C	C	C	A
14	C	C	C	C	C	A

P(C>A) = 21/36

és 21/36 ≈ 0,583 333 ≈ 58,3% .

b) E paradoxon tanulsága az, hogy *véletlen mennyiségeket* nem lehet aszerint rendezni, hogy több, mint 50%-os valószínűséggel melyik nagyobb a másiknál.
c) Legyenek **A** kocka lapjai 1,4,4,4,4,4, **B** kocka lapjai 2,2,2,5,5,5, **C** kocka lapjai 3,3,3,3,3,6.

A\B	2	2	2	5	5	5
1	B	B	B	B	B	B
4	A	A	A	B	B	B
4	A	A	A	B	B	B
4	A	A	A	B	B	B
4	A	A	A	B	B	B
4	A	A	A	B	B	B

P(B>A) = 21/36

B\C	3	3	3	3	3	6
2	C	C	C	C	C	C
2	C	C	C	C	C	C
2	C	C	C	C	C	C
5	B	B	B	B	B	C
5	B	B	B	B	B	C
5	B	B	B	B	B	C

P(C>B) = 21/36

C\A	1	4	4	4	4	4
3	C	A	A	A	A	A
3	C	A	A	A	A	A
3	C	A	A	A	A	A
3	C	A	A	A	A	A
3	C	A	A	A	A	A
6	C	C	C	C	C	C

P(A>C) = 25/36 !!!

Megjegyzés: Bebizonyítható, hogy 21/36 -nál nagyobb valószínűséggel nem verhetik körbe a kockák egymást.

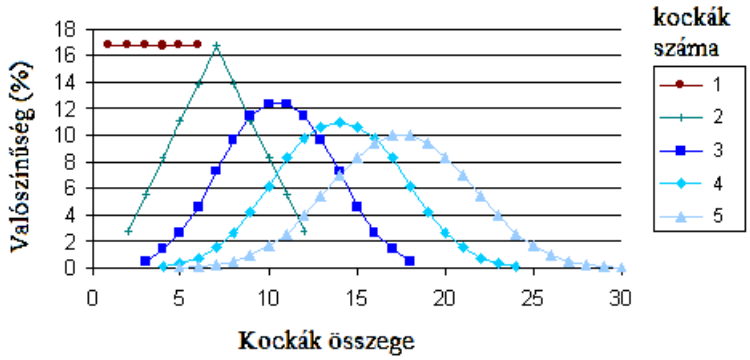
(E20) a) Két kocka összegeinek (η) valószínűségeit könnyű kiszámítani:

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(η=*i*)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

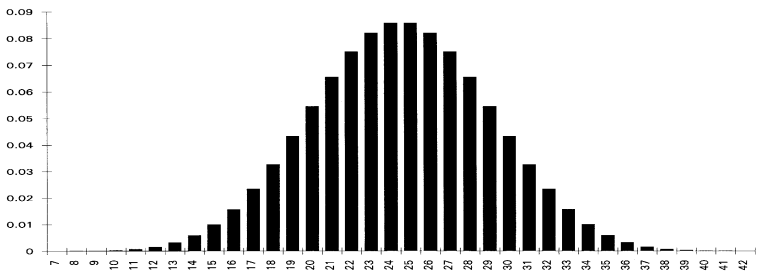
Tehát P(A nyer) = (1+3+5+5+3+1)/36 = **18/36** = 1/2 ,
P(B nyer) = (2+4+6+4+2)/36 = **18/36** = 1/2 .

b) Lásd az alábbi ábrákat.

Megjegyzés: Hiába van 2 és 12 között 6 páros és 5 páratlan szám, mégis a két nyerési valószínűség egyenlő.



Forrás: wikipédia https://de.wikipedia.org/wiki/Spielwürfel



6 kocka összege [SzI 2021]

(E21) A kockák pontjait emelkedő sorrendben írjuk ($i \le j \le k \le l$), de figyelembe vesszük a lehetséges sorrendek számát is: 5+5+5+5 (×**1**), 4+5+5+6 (×4!/2!=**12**), 4+4+6+6 (×4!/2!2!=**6**), 3+5+6+6 (×4!/2!=**12**), 2+6+6+6 (×4!/3!=**4**), tehát összesen:

$P = (1+12+6+12+4) / 6^4 = 35/ 1296 \approx 0{,}027 = 2.7\% < 3\%$

Lásd még az előző, (E20) b) feladatot is.

(E22) A feladat az American Mathematical Monthly folyóirat 40 (1933), 295. oldalán jelent meg, megoldása inkább statisztikai mint elméleti. Annyi bizonyos, hogy minden évben legalább egyszer, és legfeljebb háromszor fordul elő, ez egyszerű általános iskolai feladat.

Lásd még https://en.wikipedia.org/wiki/Friday_the_13th utolsó, "Occurence" alfejezetében, és a "Dominikai (vasárnapi) levelek" https://en.wikipedia.org/wiki/Dominical_letter címen.

(E23)

férfiaknál:
P(gyógyult | kezelt) = 700 / (700+800) = **0,4667**
P(gyógyult | nem kezelt) = 80 / (80+130) = 0,3809

nőknél:
P(gyógyult | kezelt) = 150 / (150+ 70) = **0,6818**
P(gyógyult | nem kezelt) = 400 / (400+280) = 0,5882

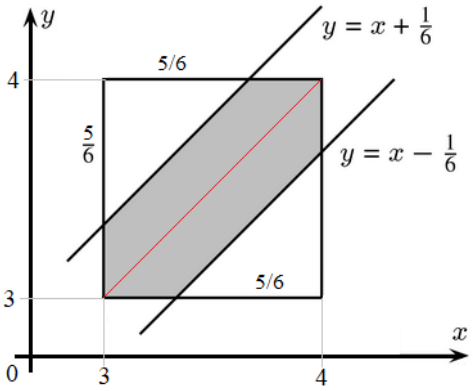
összesítve:
P(gyógyult | kezelt) = 850 / (850+ 870) = 0,4942
P(gyógyult | nem kezelt) = 480 / (480+ 410) = **0,5393**

Megjegyzés: Jól látható, hogy mind a férfiak, mind a nők körében jobb a gyógyulási arány abban az esetben, ha alkalmazzuk a gyógyszert. Ugyanakkor meglepő módon az összesített eredmény inkább azt jelzi, hogy akkor jobb a gyógyulási arány, ha nem kezeljük a betegeket.

A feladat **[SzG]** -ből származik. Hasonló meglepő feladat található **[SzI 2012a]** "*Választókörzetek*" fejezetében.

Geometriai valószínűség

(G1) Ha Jóska érkezési időpontja x és Mari érkezési időpontja y , akkor egy eseményt az (x,y) számpárral reprezentálhatunk, $3 \le x,y \le 4$, vagyis az eseménytér Ω a koordinátasík ábrán látható négyzete:



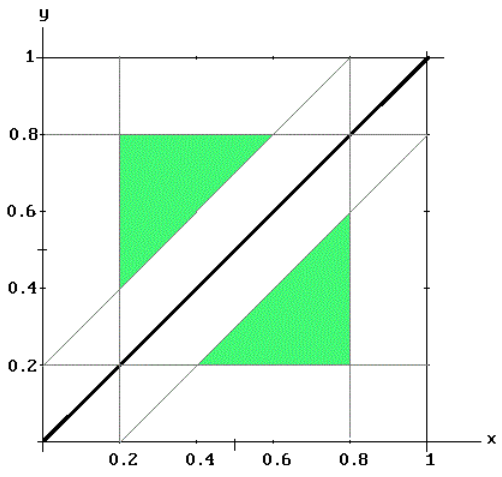
Olyan (x,y) pontpárok halmazát kell megkeresnünk, amelyekre $|x-y| \le {}^1/_6$ (hiszen 10 perc = ${}^1/_6$ óra). A négyzet piros átlójában $x=y$ (egyszerre toppannak be a könyvtárba), a négyzet átlójától távolodva $|x-y|$ értéke növekszik, vagyis a keresett terület az $y = x+{}^1/_6$ és az $y = x+{}^1/_6$ egyenesek által határolt szürke hatszög. Ekkor $P(\heartsuit) = T_{hatszög}/T_\Omega$. A hatszög területét legegyszerűbben úgy számolhatjuk ki, hogy a négyzet területéből levonjuk a két fehér háromszög területét, melyek ${}^5/_6$ oldalú egyenlő szárú derékszögű háromszögek. Tehát

$$T_{hatszög} = T_\Omega - 2\cdot({}^5/_6)^2/2 = 1 - {}^{25}/_{36} = {}^{11}/_{36} \quad \text{és így} \quad P(\heartsuit) = {}^{11}/_{36} \approx \mathbf{0{,}3055}^* \approx 30{,}5\ \%$$

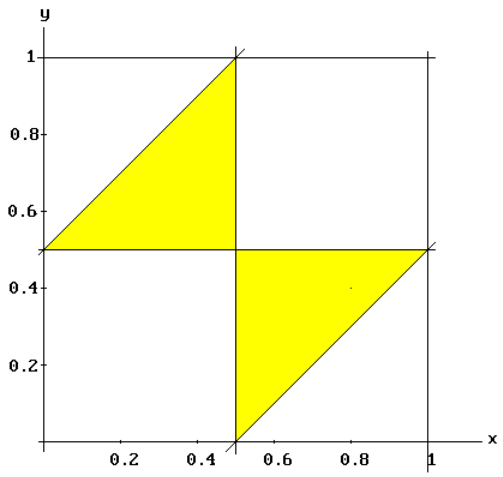
mivel $T_\Omega = 1$ **.**

(G2) Jelölje x és y a töréspontok helyét, $0 \le x,y \le 1$, az eseménytér (alaphalmaz) tehát $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ négyzet.

a) Ha $x<y$ akkor a darabok x, $y-x$ és $1-y$ hosszúak, a feltételek tehát $0{,}2 \le x$, $0{,}2 \le y-x$ azaz $x+0{,}2 \le y$ és $y \le 0{,}8$. Ha $y < x$ akkor a darabok y, $x-y$ és $1-x$ hosszúak, tehát a feltételek $0{,}2 \le y$, $0{,}2 \le x-y$ azaz $y \le x-0.2$ és $x \le 0{,}8$. Az a) ábrán látható **zöld** terület $T = 2\cdot 0{,}4^2/4 = 0{,}16$, a valószínűség tehát $\mathbf{P} = T/\Omega = \mathbf{0{,}16} = 16\%$.



a)



b)

b) HA $x<y$ akkor a darabok x, $y-x$ és $1-y$ hosszúak, a feltételek tehát a háromszög-egyenlőtlenség szerint: (#1) $x+(y-x) > (1-y)$ azaz $y > 0.5$, (#2) $x+(1-y) > (y-x)$ azaz $y < x+0.5$, (#3) $(y-x)+(1-y) > x$ azaz $x < 0.5$.
Ha $y<x$ akkor a darabok y, $x-y$, $1-x$ hosszúak, és a feltételek: (#4) $y+(x-y)>(1-x)$ azaz $x > 0.5$, (#5) $y+(1-x) > (x-y)$ azaz $x < y+0.5$, (#6) $(x-y)+(1-x) > y$ azaz $y < 0.5$.
A fenti feltételek a b) ábra sárga részében teljesülnek, tehát $\mathbf{P}(\Delta) = T_A/T_H = \mathbf{1/4} = 25\%$.

Megjegyzések: Az I) és II) esetben nyilván csak fel kell cserélni az x és y változókat, vagyis a koordinátarendszerben kapott síkrészek egymás tükörképei az $y=x$ egyenletű egyenesre.
Könnyen belátható, hogy x és y egyszerre nem lehetnek mindketten 1/2 -nél kisebbek vagy mindketten 1/2 -nél nagyobbak, a háromszög egyenlőtlenség miatt. Ezért üres a nagy négyzet bal alsó és jobb felső része.

(G3) $P(5cm) = 5^2\pi/30^2\pi = 5^2/30^2 = 1^2/6^2 = \mathbf{1/36} \approx 0{,}0277^* \approx 2{,}8\ \%$.

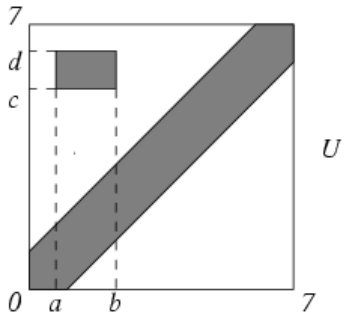
(G4) $P(csörr) = T_{ablakok}/T_{tűzfal} = (0{,}7\times0{,}8+0{,}5\times0{,}5)/3\times5 = 0{,}81/15 = \mathbf{0{,}054} = 5{,}4\ \%$.

(G5) Hasonlóan a (G1) feladathoz.

(G6*) Mivel pontosan 1 óráig tartózkodnak a könyvtárban, ezért 7:00 óráig mindegyiküknek meg kell érkezniük (12:00, vagyis 0:00 után). X és Y "összefutnak" valószínűségét G1 -hez hasonlóan vizsgálhatjuk, aminek valószínűsége 13/49 , ez az alábbi ábra átló körüli szürke sávja. A hármas találkozóhoz a $K=[0,7]\times[0,7]\times[0,7]$ kocka olyan (x,y,z) pontjait kell megkeresnünk, amelyekre

$$x-1 \le y \le x+1 \quad \text{és} \quad x-1 \le z \le x+1 \quad \text{és} \quad y-1 \le z \le y+1 .$$

Szimmetria okok miatt ennek az L résznek a térfogata 6-szor akkora, mint L azon L' részének, amelyre még az $x \ge y \ge z$ feltételek is teljesülnek. Az $x \ge y \ge z$ feltételek a K kockán belül egy tetraédert határoznak meg, ezt kell elvágnunk az $x=z+1$ egyenletű síkkal. Ha tehát az L' részt a $z=6$ egyenletű síkkal kettévágjuk, akkor az szétesik egy olyan 6 magasságú ferde hasábra, amelynek alapja egy egység oldalú derékszögű háromszög, és egy olyan tetraéderre, amelynek ugyanilyen háromszög az alapja, a magassága pedig 1. Ennek alapján L' térfogata $6/2+1/6=19/6$, így L térfogata 19 egység. Mivel pedig K térfogata $7^3=343$ egység, a keresett valószínűség **19/343** .



(G7) Az egyes körök sugarai 5, 10, 15 és 20 cm.
A négy kör kerületének összege $= 2\pi\cdot(5+10+15+20) = 100\pi \approx 314{,}16$ (cm) ,
az egyenes szakaszok hossza $= 2\cdot40+2\cdot40\cdot\sqrt{2} \approx 193{,}14$ (cm) ,
a **pókháló** teljes hossza $\approx 314{,}16+193{,}14 = 507{,}3$ cm.
a keresett valószínűség: $P \approx 193{,}14 / 507{,}3 \approx 0.381 \approx 38\ \%$.

(G8) A drágakövet kicsiny mérete miatt pontszerűnek tekinthetjük. A hat téglalap alakú lyuk területeinek összege: T= 2 (ab+ac+ad) = 2 0.5 (8+14+16) = 38 (cm^2) .
A lefolyó egy 10 cm sugarú kör, melynek területe: $T= r^2\pi = 100\pi \approx 314{,}16(cm^2)$
Annak a valószínűsége, hogy a drágakő beleesik a lefolyóba:
$P = 38/314{,}16 \approx 0.121 \approx 12\%$

Bayes tétele

(B1) Adatok: $P(B_{ösvény}) = 0{,}10$, $P(B_{földút}) = 0{,}25$, $P(B_{busz}) = 0{,}65$,
ellenőrzés: $P(B_{ösvény})+P(B_{földút}) + +P(B_{busz}) = 1{,}00$.

a) A *Teljes valószínűség tétele* szerint:

$$P(\text{Farkas}) = P(F|B_{ösvény})\cdot P(B_{ösvény}) + P(F|B_{földút})\cdot P(B_{földút}) + P(F|B_{busz})\cdot P(B_{busz}) =$$
$$= 0{,}80\cdot 0{,}10 + 0{,}60\cdot 0{,}25 + 0{,}05\cdot 0{,}65 = \mathbf{0{,}2625} \approx 26{,}2\% .$$

b) *Ha* megérkezett, akkor *nem* kapta be a Farkas:

$$P(\textit{nem}\text{Farkas}) = 1\text{-}0{,}2625 = 0{,}7375 \approx 73{,}8\% .$$

Ez az a feltétel, ami mellett kérdezzük a $B_{földút}$ valószínűségét:

$$P(\text{Nagyi hihet Piroskának}) = P(B_{földút} \mid \textit{nem}F) .$$

Bayes tétele szerint

$$P(B_{földút} \mid \textit{nem}F) = P(\textit{nem}F|B_{földút})\cdot P(B_{földút}) / P(\textit{nem}F) = (1\text{-}0{,}60)\cdot 0{,}25/0{,}7375 \approx \mathbf{0{,}13559} \approx 14\%$$

(B2) a)

$$P(\text{jó zokni}) = P(\text{jó}|\text{Saját})\cdot P(\text{Saját}) + P(\text{jó}|\text{Feleség})\cdot P(\text{FeleségSaját}) + P(\text{jó}|\text{Fiam})\cdot P(\text{Fiam})$$
$$= 0{,}90*0{,}50 + 0{,}73*0{,}32+0{,}14*0{,}18 = \mathbf{0{,}7088} \approx 71\% .$$

b) $P(\text{rossz}) = 1 - P(\text{jó}) = 1\text{-}0{,}7088 = 0{,}2912 \approx 29\%$,

$$P(\text{Fiam}|\text{rossz}) = P(\text{rossz}|\text{Fiam})\cdot P(\text{Fiam}) / P(\text{rossz}) = (1\text{-}0{,}14)*0{,}18/0{,}2912 \approx \mathbf{0{,}53159} \approx 53\% .$$

(B3) a) $P(\text{elromlik}) = 0{,}13*0{,}60+0{,}21*0{,}16+0{,}09*0{,}24 = 0{,}1332 \approx 13{,}3\%$, tehát

$$P(\text{nem romlik el}) = 1 - P(\text{elromlik}) = 1\text{-}0{,}1332 = \mathbf{0{,}8668} \approx 86{,}7\% .$$

b) $P(2.\text{lift} \mid \textit{segítség}) = P(2.\text{lift} \mid \text{elromlik}) = P(\text{elromlik} \mid 2.\text{lift})*P(2.\text{lift}) / P(\text{elromlik}) =$

$$= 0{,}21*0{,}16 / 0{,}1332 \approx \mathbf{0{,}25225} \approx 25{,}2\% .$$

c) $P(1.\text{lift} \mid \textit{emelet}) = P(1.\text{lift} \mid \text{nem romlik}) = P(\text{nem romlik} \mid 1.\text{lift})*P(1.\text{lift}) / P(\text{nem romlik})$

$$= (1\text{-}0{,}13)*0{,}60/0{,}8668 \approx \mathbf{0{,}6022} \approx 60{,}2\% .$$

(B4) a) $P(\text{kijut}) = P(\text{kijut} \mid 1.\text{lab.})*P(1.\text{lab.}) + ... + P(\text{kijut} \mid 4.\text{lab.})*P(4.\text{lab.}) =$

$$= (0{,}6+0{,}3+0{,}2+0{,}1) / 4 = \mathbf{0{,}30} = 30\% .$$

b) P(*nem* jut ki) = 1 - P(kijut) = 1-0,30 = 0,70 , tehát

P(4.lab.|*nem* jut ki) = P(*nem* jut ki|4.lab.)*P(4.lab.)/P(*nem* jut ki) = (1-0,1)*0,25/0,30 = **0,75** .

(B5) Adatok ellenőrzése: 1/10 + 1/4 + 2/5 + 5/20 = 20/20 = 1,00 , ok.

a) P(jó) = P(jó|1.árus)*P(1.árus) + ... + P(jó|4.árus)*P(4.árus) =

= 0,40*(1/10) + 0,50*(1/4) + 0,20*(2/5) + 0,90*(5/20) = **0,47** = 47% .

b) P(ütött) = 1 - P(jó) = 1-0,47 = 0,53 , tehát

P(1.árus | ütött) = P(ütött|1.árus)*P(1.árus)/P(ütött) = (1-0,40)*(1/10)/0,53 = **0,1132** ≈ 11,3% .

(B6) P(Beteg) = P(B|nő)*P(nő) + P(B|férfi)*P(férfi) = 0,30*0,50 + 0,20*0,50 = 0,25 , tehát

P(férfi|B) = P(B|férfi)*P(férfi) / P(Beteg) = 0,20*0,50 / 0,25 = 0,40 = 40 % .

(B7) a) A feladat azt kérdezi, hogy P(második fiú) =? A feladat elején leszögeztük, hogy a gyermekek nemei egymástól függetlenek, így

$$P(\textit{mindkettő fiú}) = P(\textit{második fiú}) = P(\textit{fiú}) = p = 50\% .$$

b) A feltételes valószínűség:

$$P(X \textit{ ha } Y) = \frac{P(X \textit{ és } Y)}{P(Y)}$$

tehát:

$$P(\textit{két fiú HA van fiú}) = \frac{P(\textit{két fiú ÉS van fiú})}{P(\textit{van fiú})} = \frac{P(\textit{két fiú})}{1-P(\textit{nincs fiú})} = \frac{p \cdot p}{1-q \cdot q} .$$

p=q=0.50 esetén: $= \frac{0.50 \cdot 0.50}{1-0.50 \cdot 0.50} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3} \approx 0.3333 \approx 33.33\ \%$,

p=0.51 és q=0.49 esetén: $= \frac{0.51 \cdot 0.51}{1-0.49 \cdot 0.49} \approx 0.3423 \approx 34.23\ \%$,

c)

$$P(\textit{két lány HA van lány}) = \frac{P(\textit{kétlány ÉS vanlány})}{P(\textit{vanlány})} = \frac{P(\textit{kétlány})}{1-P(\textit{nincslány})} = \frac{q \cdot q}{1-p \cdot p} .$$

p=q=0.50 esetén: $= \frac{0.50 \cdot 0.50}{1-0.50 \cdot 0.50} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3} \approx 0.3333 \approx 33.33\ \%$.

p=0.51 és q=0.49 esetén: $= \frac{0.49 \cdot 0.49}{1-0.51 \cdot 0.51} \approx 0.3245 \approx 32.45\ \%$,

d)

$$P(\textit{van lány HA van fiú}) = \frac{P(\textit{van lány ÉS van fiú})}{P(\textit{van fiú})} =$$

$$= \frac{1-P(\textit{csak fiú})-P(\textit{csak lány})}{1-P(\textit{nincs fiú})} = \frac{1-p\cdot p\cdot p-q\cdot q\cdot q}{1-q\cdot q\cdot q} = 1-\frac{p\cdot p\cdot p}{1-q\cdot q\cdot q} .$$

p=q=0.50. esetén $= 1-\frac{1/8}{1-1/8} = 1-\frac{1}{7} = \frac{6}{7} \approx 0.8571 \approx 85.71\ \%$.

p=0.51 és q=0.49 esetén $= 1-\frac{0.51\cdot 0.51\cdot 0.51}{1-0.49\cdot 0.49\cdot 0.49} \approx 0.84966 \approx 0.85\ \%$,

(B8) Legyen dr :=drogos, ndr := nem drogos (komplementer), pt :=pozitív teszt. A Teljes valószínűség- és Bayes tétele alapján

P(pt) = P(pt|dr)*P(dr) + P(pt|ndr)*P(ndr) = 0.90*0.05 + (1-0.08)*(1-0.05) = 0.235

és

P(dr|pt) = P(pt|dr)*P(dr)/P(pt) = 0.90*0.05 / 0.235 ≈ 0,19149 ≈ **19 %** .

(B9) Jelölések: *Ny*=nyer, A_1,A_2,A_3 = melyik ajtót választja eredetileg.
Legyen a nyeremény az A_1 ajtó mögött. Ha **nem vált**, akkor P(*Ny*)=1/3 .
Ha **vált**, akkor

P(*Ny*) = P(*Ny* és A_1)+P(*Ny* és A_2) +P(*Ny* és A_2) =

= P(*Ny*|A_1)·P(A_1)+P(*Ny*|A_2)·P(A_2)+P(*Ny*|A_2)·P(A_2) = 0·1/3 + 1·1/3 + 1·1/3 = 2/3 .

Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha a nyeremény eredetileg az A_2 vagy az A_3 ajtó mögött volt. TEHÁT (valószínűség szerint, vagyis **sok kísérlet** esetén) :

váltáskor a gyakoriság (valószínűség) kétszeresére emelkedik.

Hangsúlyozzuk azonban, hogy a fenti számítások csak sok kísérlet esetén, nem egyetlen játék esetén igazak!
Lásd még: https://hu.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall-paradoxon

(B10) a) [MGy] Ha egyik asztalra egyetlen édes szörpöt tesz, a másik asztalra a többit, akkor a Teljes valószínűség tétele szerint:

P(szörp) = P(szörp | I.asztal)·P(I.asztal) + P(szörp | II.asztal)·P(II.asztal) =

= 1·$^1/_2$ + $^9/_{19}$ · $^1/_2$ = $^{14}/_{19}$ ≈ **0,7368** ≈ 74% < 75% .

Ha egyik asztalra *s* pohár édes szörpöt és *k* pohár keserű löttyöt tesz, a többit a másik asztalra ($0 \le k,s \le 10$, de $1 \le k+s \le 9$), akkor hasonlóan:

$$P(\text{szörp}) = \left(\frac{s}{s+k}+\frac{10-s}{20-s-k}\right)\cdot \frac{1}{2} \qquad (\blacktriangledown)$$

Az alábbi táblázatból (sorok = *k*, oszlopok = *s*) látható, hogy az édes szörpök valószínűsége a fenti *k*=0, *s*=1 és *k*=10, *s*=9 esetekben a legnagyobb, de sajnos nem éri el a 75% -ot.

A táblázat minden sorában megjelöltük a legnagyobb elemet. A táblázat szimmetrikus a mellékátlóra, a (▼) képletből ez könnyen levezethető (az asztalok felcserélésével). Az sem véletlen, hogy mind a fő- mind a mellékátlókban 0.5 értékeket látunk.

k\s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	xxxxxx	**0.7368**	0.7222	0.7059	0.6875	0.6667	0.6429	0.6154	0.5833	0.5455	0.5000
1	0.2632	0.5000	0.5686	0.5938	**0.6000**	0.5952	0.5824	0.5625	0.5354	0.5000	0.4545
2	0.2778	0.4314	0.5000	0.5333	0.5476	**0.5495**	0.5417	0.5253	0.5000	0.4646	0.4167
3	0.2941	0.4063	0.4667	0.5000	0.5165	**0.5208**	0.5152	0.5000	0.4747	0.4375	0.3846
4	0.3125	0.4000	0.4524	0.4835	0.5000	**0.5051**	0.5000	0.4848	0.4583	0.4176	0.3571
5	0.3333	0.4048	0.4505	0.4792	0.4949	**0.5000**	0.4949	0.4792	0.4505	0.4048	0.3333
6	0.3571	0.4176	0.4583	0.4848	0.5000	**0.5051**	0.5000	0.4835	0.4524	0.4000	0.3125
7	0.3846	0.4375	0.4747	0.5000	0.5152	**0.5208**	0.5165	0.5000	0.4667	0.4063	0.2941
8	0.4167	0.4646	0.5000	0.5253	0.5417	**0.5495**	0.5476	0.5333	0.5000	0.4314	0.2778
9	0.4545	0.5000	0.5354	0.5625	0.5824	0.5952	**0.6000**	0.5938	0.5686	0.5000	0.2632
10	0.5000	0.5455	0.5833	0.6154	0.6429	0.6667	0.6875	0.7059	0.7222	**0.7368**	xxxxxx

b) $2 \cdot n$ pohár (n édes és n keserű) esetén, ha egyik asztalra k keserű és s édes poharat helyezünk (másik asztalra a többit), akkor a $0 < s+k < 2n$ feltételek esetén, (▼) -hoz hasonlóan

$$P(\text{szörp}) = \left(s/(s+k)+(n-s)/(2 \cdot n-s-k)\right) \cdot {}^{1}/_{2} \qquad (\blacktriangledown\blacktriangledown)$$

(B11) A vallomás ellenőrzése: 0,24+0,22+0,26+0,28 = 1,00 , ok.

$P(E_{elhuny}) = P(E_{elhuny}|A_{látogat})*P(A_{látogat}) + ... + P(E_{elhuny}|D_{látogat})*P(D_{látogat}) =$

$= 0{,}75*0{,}24 + 0{,}80*0{,}22 + 0{,}78*0{,}26 + 0{,}72*0{,}28 = 0{,}7604 \approx 76\ \%$.

$P(A_{látogat}|E_{elhunyt}) = P(E_{elhuny}|A_{látogat})*P(A_{látogat})/P(E_{elhuny}) = 0{,}75*0{,}24/0{,}7604 \approx 0{,}2367$,

$P(B_{látogat}|E_{elhunyt}) = P(E_{elhuny}|B_{látogat})*P(B_{látogat})/P(E_{elhuny}) = 0{,}80*0{,}22/0{,}7604 \approx 0{,}23146$

$P(C_{látogat}|E_{elhunyt}) = P(E_{elhuny}|C_{látogat})*P(C_{látogat})/P(E_{elhuny}) = 0{,}78*0{,}26/0{,}7604 \approx \mathbf{0{,}2667}$

$P(D_{látogat}|E_{elhunyt}) = P(E_{elhuny}|D_{látogat})*P(D_{látogat})/P(E_{elhuny}) = 0{,}72*0{,}28/0{,}7604 \approx 0{,}26512$

Tehát, a fenti számítások szerint *Monsieur* Poirot legnagyobb valószínűséggel **Clemency Leonidest** gyanúsíthatja meg Eustace Leonides megggyilkolásával.

Megjegyzés: Ha csak a legnagyobb / legkisebb megfordított feltételes valószínűségeket kell meghatároznunk, akkor a közös nevező, $P(E_{elhuny})$ értékét nem kell kiszámítanunk, elegendő csak a számlálók, P(E|A)*P(A) , stb. értékeit kiszámolnunk.

(B12) Összes készlet = 13+7+0,1+2 = 22,1 t , tehát P(bükk) = ${}^{13}/_{22,1}$, P(fenyő) = ${}^{7}/_{22,1}$, P(éger) = ${}^{0,1}/_{22,1}$, P(tölgy) = ${}^{2}/_{22,1}$. Tehát

$P(\text{hibátlan}) = (1-0{,}02)\cdot{}^{13}/_{22,1} + (1-0{,}05)\cdot{}^{7}/_{22,1} + (1-0{,}005)\cdot{}^{0,1}/_{22,1} + (1-0{,}007)\cdot{}^{2}/_{22,1} \approx 0{,}971\ 74$.

Így $P(\text{éger} \mid \text{hibátlan}) = (1-0{,}005)\cdot{}^{0,1}/_{22,1} / 0{,}971\ 74 \approx \mathbf{0{,}004633} \approx 0{,}46\ \%$.

Függetlenség

(F1) P(A)=8/32=1/4, P(B)=4/32=1/8, P(AB)=1/32, és (1/4)·(1/8) = 1/32 miatt A és B valóban független.

(F2) a) $P(A) = P(B) = 1-P(A^-) = 1-(5/6)^2 = 11/36$, $P(AB) = P(A\text{és}B) = 2/36$, de $(11/36)^2 = 121/36^2 \neq 2/36 = 72/36^2$ miatt A és B **nem** függetlenek.

b) $P(A) = P(B) = 1-P(A^-) = 1-(5/6)^5 = 4651/7776 \approx 0{,}598$.

$P(AB) = P(A\text{és}B)$ kiszámítása most nehezebb: $P(A\text{és}B) = 1 - P((A\text{és}B)^-) = 1 - P(A^-\text{vagy}B^-)$, és $P(A^-\text{vagy}B^-) = P(A^-) + P(B^-) - P(A^-\text{és}B^-) = (5/6)^5 + (5/6)^5 - (4/6)^5 = 871/1296 \approx 0{,}672$, tehát $P(A\text{és}B) = 1 - 871/1296 = 425/1296 \approx 0.3279$.

Mivel $P(A)\cdot P(B) = (4651/7776)^2 \approx 0.35775 \neq 0.3279 \approx P(A\text{és}B)$, ezért A és B nem függetlenek.

Megjegyzés: Érdekesebb, de nehezebb a következő kérdés: **c)** A = *van* 6-os, B = *nincs* 1-es.

(F3) Két kocka lehetséges értékei:

	1	2	3	4	5	6
1						A
2						A
3						AB
4					B	AB
5				B	B	AB
6	A	A	AB	AB	AB	AB

vagyis P(A)=11/36, P(B)=10/36, $P(A\cap B)=7/36$, így

$P(A|B) = P(A\cap B)/P(B) = 7/10 = 0{,}7 > 11/36 \approx 0{,}305\,56 = P(A)$

$P(B|A) = P(A\cap B)/P(A) = 7/11 \approx 0{,}6363 > 10/36 \approx 0{,}277\,78 = P(B)$

tehát A és B *mindketten* **erősítik** egymást !

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy

$$P(A\cap B) > P(A)\cdot P(B)$$

esetén A és B mindketten erősítik egymást, míg

$$P(A\cap B) < P(A)\cdot P(B)$$

esetén mindketten gyengítik egymást *kölcsönösen* !

Tehát eseményeknél nincs aszimmetria, vagyis egyik gyengítenél a másikat míg a másik erősítené az egyiket!

(F4*) Feltehető, hogy például $P(A)\leq P(B)$. Mivel nyilván $P(AB)\leq P(A)$, ezért

$P(AB)-P(A)P(B) \leq P(A)-P(A)P(B) = P(A)(1-P(B)) \leq P(B)(1-P(B)) \leq [(P(B)+(1-P(B))/2]^2 = {}^1/_4$

a (kéttagú) számtani és mértani középre fennálló egyenlőtlenség szerint.

Még azt kell belátnunk, hogy $P(AB)-P(A)P(B) \geq -1/4$.

Alkalmazzuk a fent bebizonyított $P(XY)-P(X)P(Y) \le {}^1\!/_4$ egyenlőtlenséget az $X=B$, $Y=A^{\neg}$ eseményekre ($A^{\neg}$ = A tagadása) :

$$P(BA^{\neg})-P(B)P(A^{\neg}) \le 1/4 \,. \qquad (\clubsuit)$$

A $BA^{\neg}$ és BA események egymást kizáróak, és $BA^{\neg}+BA=B$, ezért $P(BA^{\neg}) = P(B)-P(BA)$. Így (♣) szerint

$$1/4 \ge P(BA^{\neg})-P(B)P(A^{\neg}) = \mathbf{(}P(B)-P(AB)\mathbf{)} - \mathbf{(}P(B)-P(B)P(A)\mathbf{)} = P(A)P(B)-P(AB)\,,$$

átrendezve: $P(AB)-P(A)P(B) \ge -1/4$.

Megjegyzés: A bizonyított egyenlőtlenség éles: ha például $A=B$ = egy érmét feldobva "fej", akkor $P(AB)-P(A)P(B) = P(A)-P(A)^2 = 1/4$. Ha pedig $B = A^{\neg}$, akkor $P(AB)-P(A)P(B) = 0-1/4 = -1/4$.

(F5) a) $0.99^{365} \approx 0.0255 = 2.55\%$, még 3% sincs
b) $0.999^{365} \approx 0.694 = 69.4\%$ és
$0.9999^{365} \approx 0.964 = 96.4\%$ " *közel* 97%-os a valószínűség " .

(F6*) Mindenekelőtt nyilvánvaló, hogy A és B valóban független, hiszen az első dobás eredménye független a másodiktól. Az A és a C (illetve a B és a C) azonban nem látszanak eleve függetlennek, de $P(A)P(C) = 1/4 = P(AC)$ és hasonlóan $P(B)P(C) = P(BC)$, így valóban függetlenek.

Ugyanakkor A is, B is és C is éppen akkor következik be, ha a másik két esemény közül pontosan az egyik, így bármely kettő valóban meghatározza a harmadikat.

Megjegyzés: ([SzG]) Ez a paradox jelenség azt mutatja, hogy az események *páronkénti* függetlensége egyáltalán nem jelenti azt, hogy az események *összességükben* is függetlenek. Ha ez utóbbit szeretnénk kifejezésre juttatni, akkor – mint láttuk – a *páronkénti* függetlenségnél többet kell feltételezni. Események valamilyen halmazát akkor nevezzük *teljesen függetlennek*, ha akárhogyan választunk is ki közülük véges sokat, például az $A_1,A_2,...,A_n$ eseményeket, ezekre mindig teljesül a

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2) \,...\, P(A_n)$$

egyenlőség, vagyis az együttes bekövetkezésük valószínűsége mindig egyenlő a külön-külön vett valószínűségeik szorzatával.

(F7*) A 32 illetve 16 eset részletes számolását lásd a következő oldalakon.

Megjegyzés: Mint láttuk az a) és b) feladatban: a tévedés valószínűsége nem csökken, hanem megnő (0,7% -ról 1,2% -ra) akkor, ha E (akinek a tévedése a legvalószínűbb) feladja önálló véleményét, és mindig úgy dönt, ahogyan A (aki a legritkábban téved) ! Ez a paradoxon is arra világít rá, milyen meglepő helyzetek állhatnak elő, ha a szavazók feladják önálló véleményüket. Székely Gábor [SzG] -ben további példákat is ismertet.

A = A téved, $P(A) = 0.05 = \ 5\%$, $\overline{A}$ = A nem téved, $P(\overline{A}) = 0.95$,
B = B téved, $P(B) = 0.05 = \ 5\%$, $\overline{B}$ = B nem téved, $P(\overline{B}) = 0.95$,
C = C téved, $P(C) = 0.10 = 10\%$, $\overline{C}$ = C nem téved, $P(\overline{C}) = 0.90$,
D = D téved, $P(D) = 0.10 = 10\%$, $\overline{D}$ = D nem téved, $P(\overline{D}) = 0.90$,
E = E téved, $P(E) = 0.20 = 20\%$, $\overline{E}$ = E nem téved, $P(\overline{E}) = 0.80$,

Összesen (ki téved és ki nem): $2^5 = 32$ eset

pontosan három téved <=> kettő ok, $\binom{5}{2} = 10$ eset:

$P\left(A \cap B \cap C \cap \overline{D} \cap \overline{E}\right) = 0.05 \cdot 0.05 \cdot 0.1 \cdot (1 - 0.1) \cdot (1 - 0.2) = 0.000\,18$

$P\left(A \cap B \cap \overline{C} \cap D \cap \overline{E}\right) = 0.05 \cdot 0.05 \cdot (1 - 0.1) \cdot 0.1 \cdot (1 - 0.2) = 0.000\,18$

$P\left(A \cap \overline{B} \cap C \cap D \cap \overline{E}\right) = 0.05 \cdot (1 - 0.05) \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot (1 - 0.2) = 0.000\,38$

$P\left(\overline{A} \cap B \cap C \cap D \cap \overline{E}\right) = (1 - 0.05) \cdot 0.05 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot (1 - 0.2) = 0.000\,38$

$P\left(A \cap B \cap \overline{C} \cap \overline{D} \cap E\right) = 0.05 \cdot 0.05 \cdot (1 - 0.1) \cdot (1 - 0.1) \cdot 0.2 = 4.05 \times 10^{-4}$

$P\left(A \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{D} \cap E\right) = 0.05 \cdot (1 - 0.05) \cdot 0.1 \cdot (1 - 0.1) \cdot 0.2 = 8.55 \times 10^{-4}$

$P\left(\overline{A} \cap B \cap C \cap \overline{D} \cap E\right) = (1 - 0.05) \cdot 0.05 \cdot 0.1 \cdot (1 - 0.1) \cdot 0.2 = 8.55 \times 10^{-4}$

$P\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap D \cap E\right) = 0.05 \cdot (1 - 0.05) \cdot (1 - 0.1) \cdot 0.1 \cdot 0.2 = 8.55 \times 10^{-4}$

$P\left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cap D \cap E\right) = (1 - 0.05) \cdot 0.05 \cdot (1 - 0.1) \cdot 0.1 \cdot 0.2 = 8.55 \times 10^{-4}$

$P\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C \cap D \cap E\right) = (1 - 0.05) \cdot (1 - 0.05) \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.2 = 1.805 \times 10^{-3}$

pontosan négy téved $\left(\binom{5}{1} = 5\right)$

$P\left(A \cap B \cap C \cap D \cap \overline{E}\right) = 0.05 \cdot 0.05 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot (1 - 0.2) = 0.00002 = 2 \times 10^{-5}$

$P\left(A \cap B \cap C \cap \overline{D} \cap E\right) = 0.05 \cdot 0.05 \cdot 0.1 \cdot (1 - 0.1) \cdot 0.2 = 4.5 \times 10^{-5}$

$P\left(A \cap B \cap \overline{C} \cap D \cap E\right) = 0.05 \cdot 0.05 \cdot (1 - 0.1) \cdot 0.1 \cdot 0.2 = 4.5 \times 10^{-5}$

$P\left(A \cap \overline{B} \cap C \cap D \cap E\right) = 0.05 \cdot (1 - 0.05) \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.2 = 9.5 \times 10^{-5}$

$P\left(\overline{A} \cap B \cap C \cap D \cap E\right) = (1 - 0.05) \cdot 0.05 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.2 = 9.5 \times 10^{-5}$

pontosan öt téved $\left(\binom{5}{0} = 1\right)$

$P(A \cap B \cap C \cap D \cap E) = 0.05 \cdot 0.05 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.2 = 5.0 \times 10^{-6}$

Összesítve:

$0.000\,18 \cdot 2 + 0.000\,38 \cdot 2 + 4.05 \times 10^{-4} + 8.55 \times 10^{-4} \cdot 4 + 1.805 \times 10^{-3} + 2 \times 10^{-5}$
$+ \ 4.5 \times 10^{-5} \cdot 2 + 9.5 \times 10^{-5} \cdot 2 + 5.0 \times 10^{-6} = 7.055 \times 10^{-3} = 0.007055 \approx 0.7\%$

b) *HA* **E** mindig úgy szavaz, mint **A** : ekkor: E téved <=> A téved ,

és: $P(A \cap E) = P(A) = 0.05$ és $P\left(\overline{A} \cap \overline{E}\right) = P\left(\overline{A}\right) = 0.95$.

pontosan "három" téved:

$$P\left(\overline{A} \cap B \cap C \cap D \cap \overline{E}\right) = 0.95 \cdot 0.05 \cdot 0.10 \cdot 0.10 = 4.75 \times 10^{-4}$$

$$P\left(A \cap B \cap \overline{C} \cap \overline{D} \cap E\right) = 0.05 \cdot 0.05 \cdot 0.90 \cdot 0.90 = 2.025 \times 10^{-3}$$

$$P\left(A \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{D} \cap E\right) = 0.05 \cdot 0.95 \cdot 0.10 \cdot 0.90 = 4.275 \times 10^{-3}$$

$$P\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap D \cap E\right) = 0.05 \cdot 0.95 \cdot 0.90 \cdot 0.10 = 4.275 \times 10^{-3}$$

pontosan "négy" téved:

$$P\left(A \cap B \cap C \cap \overline{D} \cap E\right) = 0.05 \cdot 0.05 \cdot 0.10 \cdot 0.90 = 2.25 \times 10^{-4}$$

$$P\left(A \cap B \cap \overline{C} \cap D \cap E\right) = 0.05 \cdot 0.05 \cdot 0.90 \cdot 0.10 = 2.25 \times 10^{-4}$$

$$P\left(A \cap \overline{B} \cap C \cap D \cap E\right) = 0.05 \cdot 0.95 \cdot 0.10 \cdot 0.10 = 4.75 \times 10^{-4}$$

pontosan "öt" téved:

$$P(A \cap B \cap C \cap D \cap E) = 0.05 \cdot 0.05 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.2 = 5.0 \times 10^{-6}$$

Összesítve:

$$4.75 \times 10^{-4} + 2.025 \times 10^{-3} + 4.275 \times 10^{-3} + 4.275 \times 10^{-3} + 2.25 \times 10^{-4} +$$

$$+2.25 \times 10^{-4} + 4.75 \times 10^{-4} + 5.0 \times 10^{-6} = \mathbf{0.011\,98} \approx 1.2\%$$

Diszkrét eloszlások

(D1) [SzI 2021] 7.27. Állítása felhasználásával:

$P(\xi \le 9) = P(\xi=1)+...+P(\xi=9) = 0{,}35 + (1-0{,}35)\cdot 0{,}35 + ... + (1-0{,}35)^8 \cdot 0{,}35 = 1-(1-0{,}35)^9$ $\approx$ **0,979 288** $\approx$ 98 % .

(D2) $P(\xi \le 7) = (1-0{,}15) + 0{,}15\cdot(1-0{,}15) + ... + 0{,}15^6\cdot(1-0{,}15) = 1-0{,}15^7 \approx$ **0,999998** $\approx 100\%$

(D3) Legyen A:="legalább egyik hatos", ekkor $p = P(A) = 1-P(A^-) = 1-(5/6)^2 = 11/36$.

$P(\xi \le 4) = 1-(1-p)^4 = 1 - \mathbf{((}5/6)^2\mathbf{)}^4 \approx$ **0,7674** $\approx$ 76,7% .

ξ eloszlása: $P(\xi=k) = (1-p)^k \cdot p = (5/6)^{2k} \cdot \mathbf{(}1-(5/6)^2\mathbf{)}$ ahol $k = 1,2, ...$

$M(\xi) = 1/p =$ **36/11** $\approx 3{,}2727$, $D(\xi) = \dfrac{\sqrt{1-p}}{p} = \sqrt{(5/6)^2}$ **/ (**$1-(5/6)^2$**) = 30/11** $\approx 2{,}727$.

(D4) $P(\xi \le k) = 1-(1-0{,}75)^k \ge 0{,}99 \leftrightarrow 0{,}01 \ge (0{,}25)^k \leftrightarrow \log_{0{,}25}(0{,}01) \approx 3{,}322 \le k$, tehát **4** kalapácsütés elegendő.

(D5) a) Kezdő nyer = 1. dobása ok VAGY (elrontja és 2. elrontja és Kezdő 2. dobása ok) VAGY (...) ... , így (a mértani sorok összege alapján)

$$P(\text{Kezdő}) = 0{,}5 + 0{,}5^3 + 0{,}5^5 + \ldots = 0{,}5\cdot 1/(1-0{,}5^2) = \mathbf{2/3} \approx 0{,}6667 \approx 66{,}7\%$$

$$P(\text{Második}) = 0{,}5^2 + 0{,}5^4 + 0{,}5^6 + \ldots = 0{,}5^2\cdot 1/(1-0{,}5^2) = \mathbf{1/3} \approx 0{,}3333 \approx 33{,}3\%$$

tehát Kezdő kétszer akkora valószínűséggel nyer.

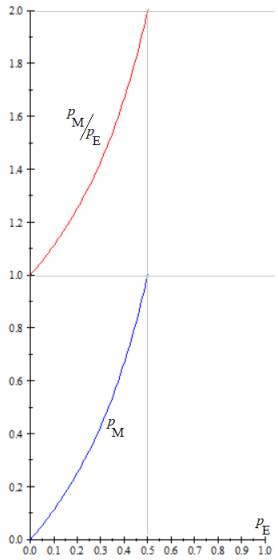
b) A fenti gondolatmenethez hasonlóan ($q_E := 1-p_E$ és $q_M := 1-p_M$) :

$$P(\text{Kezdő}) = p_E + q_E q_M p_E + (q_E q_M)^2 p_E + \ldots = p_E/(1-q_E q_M) = p_E/(p_M+p_E-p_M p_E)$$

$$P(\text{Másod.}) = q_E p_M + q_E q_M q_E p_M + (q_E q_M)^2 q_E p_M + \ldots = q_E p_M/(1-q_E q_M) = (1-p_E)p_M/(p_M+p_E-p_M p_E)$$

Ellenőrzés: $p_E/(p_M+p_E-p_M p_E) + (1-p_E)p_M/(p_M+p_E-p_M p_E) = 1$, ok.

Megjegyzés: Kezdő és Második esélye pontosan akkor *egyenlő*, ha $p_E = (1-p_E)p_M$ (nevezők azonosak), vagyis $\boldsymbol{p_M = p_E/(1-p_E)}$, vagy másképpen: $\boldsymbol{p_M/p_E = 1/(1-p_E)}$, de a $0<p_M\le 1$ feltétel miatt csak $p_E \le 1/2$ jöhet szóba (ez nyilvánvaló: nagyobb p_E esetén már nem lehetnek egyenlő esélyek). A mellékelt ábrán $\boldsymbol{p_M}$ és $\boldsymbol{p_M/p_E}$ értékeit láthatjuk $0 \le p_E \le 1/2$ esetén.



(D6) Legyen $\xi :=$ *a számla végösszege* és $\eta :=$ *vásárló nyeresége*. Ekkor

$\xi = k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
η	0	1	2	-2	-1	0	1	2	-2	-1
$P(\xi=k)$	$^1/_{10}$	$^1/_{10}$	$^1/_{10}$	$^1/_{10}$	$^1/_{10}$	$^1/_{10}$	$^1/_{10}$	$^1/_{10}$	$^1/_{10}$	$^1/_{10}$

tehát η eloszlása:

$\eta = \ell$	-2	-1	0	1	2
$P(\eta=\ell)$	$^2/_{10}$	$^2/_{10}$	$^2/_{10}$	$^2/_{10}$	$^2/_{10}$

ami alapján $\mathbf{M(\eta)} = {}^2/_{10}\cdot(-2-1+0+1+2) = \mathbf{0}$, $M(\eta^2) = {}^2/_{10}\cdot(2^2+1^2+0^2+1^2+2^2) = 2$, így $D^2(\eta) = M(\eta^2) - M^2(\eta) = 2-0 = 2$ és $\mathbf{D(\eta) = \sqrt{2} \approx 1{,}414}$

(D7) a) Itt nincs valószínűség (T a kezdeti hőmérséklet):

$$\xi = 0{,}90^k \cdot T \le 0{,}50\cdot T \leftrightarrow k \ge \log_{0{,}90}(0{,}50) \approx \mathbf{6{,}5788}\ ,$$

illetve

$$\xi = 0{,}90^k \cdot T \le 0{,}10\cdot T \leftrightarrow k \ge \log_{0{,}90}(0{,}10) \approx \mathbf{21{,}8543}\ ,$$

b)

$$P(\xi>5) = 1-P(\xi\le 5) = (1-0{,}15)^5 = 0{,}85^5 \approx \mathbf{0{,}4437} \approx 44\%\ ,$$

c)

$$P(\xi\geq 100) = 1\text{-}P(\xi\leq 99) = (1\text{-}0{,}019)^{99} = 0{,}981^{99} \approx \mathbf{0{,}1497} \approx 15\% \ .$$

(D8) Nyilván Ω = {összes sorrend}, vagyis $|\Omega|=N!$ Legyen

$\mathbf{S_k}$:= "*a* ***k*** *-stratégia mellett Szindbád a legszebb hölgyet választja ki*" ($k<N$ rögzített),

és

$\mathbf{A_i}$:= "*a legszebb hölgy* ***i*** *-ként érkezik*" ($1\leq i\leq N$).

Ekkor $P(A_i) = (N\text{-}1)!/N! = 1/N$.

Továbbá $i\leq k$ esetén $P(S_k|A_i)=0$ (az első k hölgyet mindenképpen elengedi), és $i>k$ esetén akkor sikerül a leges-legszebbet választania, ha az első i-1 elvonuló közül a ("második") legszebb az első k hölgy között vonult el, aminek valószínűsége ($k<i\leq N$ rögzítettek) : $P(S_k|A_i) = k/(i\text{-}1)$. Tehát

$$P(S_k) = \Sigma_i\, P(S_k|A_i)\cdot P(A_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=k+1}^{N}\frac{k}{i-1} = \frac{k}{N}\sum_{i=k}^{N-1}\frac{1}{i}$$

Lásd még [MOE, 40.o.] és [SzG, 196.o.].

(D9) Ez hipergeometrikus eloszlás: összes=120, lejárt=120·0,05=6, kiválaszt=10.

a) $P(\xi=2) = \dfrac{\binom{6}{2}\binom{120-6}{10-2}}{\binom{120}{10}} \approx 0{,}0711 \approx 7\%$

b) $P(\xi\leq 3) = P(\xi=0) + P(\xi=1) + P(\xi=2) + P(\xi=3) =$

$$= \frac{\binom{6}{0}\binom{120-6}{10-0}}{\binom{120}{10}} + \frac{\binom{6}{1}\binom{120-6}{10-1}}{\binom{120}{10}} + \frac{\binom{6}{2}\binom{120-6}{10-2}}{\binom{120}{10}} + \frac{\binom{6}{3}\binom{120-6}{10-3}}{\binom{120}{10}}$$

$\approx 0.586367+0.335067+0.071\,123+0.007\,090 \approx 0.999647 \approx 100\%$

(D10) a) A kezdeti évben $J_0=0$ és $L_0=\ell\geq 3$. Minden juhnak minden évben átlagosan u darab utóda van, amelyeknek átlagosan p -ed része nem tarka, vagyis Lábánnál marad **,** q=1-p -ed részét pedig megkapja Jákob. Tehát

$$L_{n+1} = L_n + upL_n = (1+up)\cdot L_n$$

és

$$J_{n+1} = J_n + uJ_n + uqL_n = (1+u)\cdot J_n + uqL_n \ ,$$

ahonnan $L_n = L_0\cdot(1+up)^n$.

Mivel nyilvánvalóan a juhok *összes* száma

$$\ddot{O}_n = L_n+J_n = (L_0+J_0)\cdot(1+u)^n = L_0\cdot(1+u)^n \ ,$$

ezért $J_n = \ddot{O}_n - L_n = L_0\cdot(1+u)^n - L_0\cdot(1+up)^n$.

Tehát

$$J_n/L_n = [L_0\cdot(1+u)^n - L_0\cdot(1+up)^n] \,/\, [L_0\cdot(1+up)^n] = \mathbf{[(1+u)/(1+up)]^n - 1}$$

ami valóban exponenciálisan gyorsan végtelenhez tart az *n* növekedésével, vagyis idővel Jákob valóban összehasonlíthatatlanul gazdagabb lesz Lábánnál.

b) n=14 esetén $J_n/L_n = [3/2{,}8]^{14} - 1 \approx$ **1,6272** , ami több, mint másfélszeres!

Sőt, 20 év múltával (azaz n=20), $J_n/L_n \approx 3$ (háromszoros!).

Megjegyzés: ([SzG]) Erre a paradoxonra több misztikus magyarázat született. Már a Biblia maga is tartalmaz egy ilyent: https://szentiras.hu/KNB/Ter30 . Mint Rényi Alfréd felhívta a figyelmet: ez a paradoxon minden misztikum nélkül, egyszerű matematikai következtetéssel is megérthető, mégpedig arra építve, hogy Jákob sohasem adott vissza juhokat Lábánnak, Lábán viszont mindig odaadta juhainak egy részét Jákobnak. (Lásd: Rényi A.: *Sztochasztikus folyamatok a biológiában*, Természet Világa, 1980. március–április.)

(D11*) a) Jelölje $\mathbf{M_{aF}}$ az FF-hez szükséges dobások számának **várható értékét** *ha* az első dobás F, és $\mathbf{M_{aI}}$ abban az esetben, *ha* az első dobás I , tehát M(FF) = $(M_{aF}+M_{aI})/2$. Ekkor

$$M_{aF} = 1+(1+M_{aI})/2 \quad \text{és} \quad M_{aI} = 1+(M_{aF}+M_{aI})/2 \,, \qquad (\spadesuit)$$

ugyanis: az első dobás F (már dobtunk egyet) után *vagy* F következik és OK (+1 dobás, 50%) *vagy* I következik, ami $+M_{aI}$ dobást jelent (50%); és hasonlóan: az első dobás I (már dobtunk egyet) után *vagy* F *vagy* I következik (50%-50%), vagyis átlagosan még $(M_{aF} + M_{aI})/2$ dobás.

A (♠) egyenletrendszer megoldása $M_{aF}=5$ és $M_{aI}=7$, tehát az FF-hez szükséges dobások átlagos száma M(FF) = $(M_{aF}+M_{aI})/2$ = **6**.

b) Hasonlóan, legyen $\mathbf{M_{bF}}$ és $\mathbf{M_{bI}}$ az FI -hez szükséges dobások számának várható értéke *ha* az első dobás F illetve I. Ekkor

$$M_{bF} = 1+(M_{bF}+1)/2 \quad \text{és} \quad M_{bI} = 1+(M_{bF}+M_{bI})/2 \,, \qquad (\spadesuit\spadesuit)$$

ugyanis: az első dobás F (egyet már dobtunk) után *vagy* F következik ami $+M_{bF}$ dobást jelent (50%) *vagy* I következik és OK (+1 dobás, 50%); és hasonlóan: az első dobás I (egyet már dobtunk) után *vagy* F *vagy* I következik (50%-50%), vagyis átlagosan még $(M_{bF} + M_{bI})/2$ dobás.

A (♠♠) egyenletrendszer megoldása $M_{bF}=3$ és $M_{bI}=5$, tehát az FI-hez szükséges dobások átlagos száma M(FI) = $(M_{bF}+M_{bI})/2$ = **4**.

Megjegyzések: Tudjuk, hogy a dobások során F és I valószínűsége ugyanannyi, sőt bármelyik F vagy I után ugyanakkora valószínűséggel következik akár F akár I, valamint az FF és FI sorozatok valószínűsége is ugyanakkora. Mégis, a feladat eredménye szerint, a dobássorozatok során (átlagosan) hamarabb kapunk FI sorozatot, mint FF sorozatot!

Bebizonyítható, hogy az n hosszúságú F - I sorozatok közül arra kell a legtöbbet várni, amelyik kizárólag F-ekből vagy kizárólag I-kből áll. Ilyenkor átlagosan $2^{n+1}-2$ a szükséges dobásszám, de a lehető legkevesebb átlagos dobásszám is 2^n, például akkor, ha addig dobunk, amíg n-1 darab F és egy ezt követő I nem fordul elő. Tehát majdnem kétszer annyi ideig kell várni a tiszta F blokkra, mint erre a másikra, annak ellenére, hogy ugyanolyan valószínűséggel következik be korábban a tiszta F blokk, mint a másik. **[SzG]**

Poisson eloszlás

(P1) $\lambda_{100dkg} = 50$ (átlag) $\Rightarrow$ $\lambda_{10dkg} = 50/10 = 5$ $\Rightarrow$ $P(\xi=7) = (5^7/7!)\cdot e^{-5} \approx \mathbf{0{,}104445} \approx 10{,}44\%$

(P2) $\lambda_{60perc} = 11$ (átlag) $\Rightarrow$ $\lambda_{15perc} = 11/4 = 2{,}75$ $\Rightarrow$ $P(\xi\le 2) = P(\xi=0)+P(\xi=1)+P(\xi=2) =$
$= \mathbf{(}2{,}75^0/0! + 2{,}75^1/1! + 2{,}75^2/2!\mathbf{)}\cdot e^{-2{,}75} \approx \mathbf{0.481\ 457} \approx 48\%$.

(P3) $\lambda_{10m} = 6$ (átlag) $\Rightarrow$ $\lambda_{4m} = 4/10\cdot 6 = 2{,}4$ $\Rightarrow$ $P(\xi<3) = P(\xi\le 2) = P(\xi=0)+P(\xi=1)+P(\xi=2) =$
$= \mathbf{(}2{,}4^0/0! + 2{,}4^1/1! + 2{,}4^2/2!\mathbf{)}\cdot e^{-2{,}4} \approx \mathbf{0.569\ 708} \approx 57\%$.

(P3) ξ = 1 palackban levő kavicsok száma $\Rightarrow$ $\lambda = 300/1000 = 0{,}3$,
$P(\xi\ge 2) = 1-P(\xi<1) = 1-P(\xi\le 1) = 1 - \mathbf{(}\ P(\xi=0)+P(\xi=1)\ \mathbf{)} = 1 - \mathbf{(}0{,}3^0/0! + 0{,}3^1/1!\mathbf{)}\cdot e^{-0{,}3} \approx$
$\approx \mathbf{0{,}036\ 936} \approx 3{,}7\%$.

(P5) $\lambda_{1év} = 3$ (átlag) $\Rightarrow$ $\lambda_{1nap} = 3/365$ $\Rightarrow$ $P(\xi=0) = \mathbf{(}(3/365)^0/0!\mathbf{)}\cdot e^{-3/365} = 1\cdot e^{-3/365}$
$\approx \mathbf{0.991\ 815} \approx 99\%$.

Folytonos eloszlások

(f1) Megoldás: Nyilván $F(0)=0$, $F(R)=1$ és $0<x<R$ esetén

$$F(x) = P(\xi<x) = (x^2/\pi)/(R^2/\pi) = x^2/R^2 \ ,$$

tehát $0<x<R$ esetén $f(x) = F'(x) = 2x/R^2$.

(f2) Megoldás: Legyen ξ:= mennyi ideig töltjük a lufit, így $0<x<10$ esetén $f_\xi(x)=1/10$ és $F_\xi(x)= = P(\xi<x) = x/10$. A lufi térfogata $\xi\cdot V_o$ valamilyen V_o pozitív számra ($0\le\xi V_o\le 10V_o$). Jelölje η a lufi átmérőjét, nyilván $\xi V_o = 4(\eta/2)^3\pi/3$, azaz $\eta = 2\cdot\sqrt[3]{(3\xi V_o/4\pi)}$ (köbgyök), és $0\le\eta\le 2\cdot\sqrt[3]{(30V_o/4\pi)}$. Így a keresett eloszlás:

$$F_\eta(t) = P(\eta<t) = P(2\cdot\sqrt[3]{(3\xi V_o/4\pi)} < t) = P(\xi<4(t/2)^3\pi/3V_o) = F_\xi(4(t/2)^3\pi/3V_o) =$$
$$= 4(t/2)^3\pi/30V_o = c_o\cdot t^3 \ , \qquad (\ c_o = 4(1/2)^3\pi/30V_o\ )$$

és

$$f_\eta(t) = 3c_o\cdot t^2 \qquad \mathbf{(}\ 0\le t\le 2\cdot\sqrt[3]{(30V_o/4\pi)}\ \mathbf{)}$$

Megjegyzés: Első olvasásra a végeredmény ellenkezhet a szemléletünknek. Ugyanis a sűrűségfüggvény ott nagyobb, ahol az eloszlás is nagy, a kapott végeredmény szerint ez a legnagyobb t -nél van, márpedig a szemlélet szerint a legnagyobb lufiátmérő a legritkább. Azonban a kis átmérőkön hamar átjut a lufi, a nagyobbak esetén már hosszabb idő kell a növekedéshez. Így hosszabb időintervallum kell nagy átmérő esetén ugyanakkora növekedéshez, mint kis átmérő esetén. *Hosszabb időintervallumhoz pedig nagyobb valószínűség tartozik*. (A kis átmérők hamar elmúlnak, a nagy átmérők jobban megmaradnak.)

Exponenciális eloszlás

(e1) Átlag = $M(\xi) = 1/\lambda = 100$ (óra), tehát $\lambda = 1/100$ (1/óra), így

a)

$$P(\xi \geq 70) = 1 - P(\xi < 70) = 1 - F(70) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{70}{100}}\right) = 0{,}4966$$

b) $P(\xi \geq 100) = 1 - P(\xi < 100) = 1 - F(100) = 1 - (1-\exp(-100/100)) = 1/e \approx 0{,}36788 \approx 37\%$

Megjegyzés: A b) feladatban láttuk, hogy λ , vagyis $M(\xi)$ lényegtelen: *tetszőleges* exponenciális valószínűségi változóra $P(\xi \geq M(\xi)) = 1/e \approx 37\%$.

A 37% kevésnek tűnik ahhoz, hogy egy (új) készülék legalább az átlagos élettartamot megérje. Ennek oka egyrészt az, hogy az *átlag* nem azonos a *névleges* vagy a *garanciális* élettartammal, tehát például lehet néhány matuzsálemi gép is. Másrészt az exponenciális eloszlás *nem öregedő*, ami a valóságban legtöbbször nem teljesül. Vagyis az általunk használt képlet a valóság leegyszerűsítése (iskolai feladatokhoz), a valóság ennél jóval bonyolultabb.

(e2) Legyen ξ := "a várakozási idő" (perc). Ekkor a feltétel szerint

$$P(\xi>6) = 1-P(\xi<6) = 1-F(6) = 1 - (1-e^{-\lambda\cdot 6}) = e^{-\lambda\cdot 6} = 0{,}3$$

ahonnan $-\lambda\cdot 6 = \ln(0{,}3)$ és $\lambda = -\ln(0{,}3)/6 \approx \mathbf{0{,}20066}$, az átlagos várakozási idő $M(\xi) = 1/\lambda \approx 1/0{,}20066 \approx 4{,}98$ (perc). (Folytonos valószínűségi változóknál $P(\xi=c) = 0$.)

A feladat olyan t időt keres, amelyre

$$P(\xi<t) = F(t) = 1-e^{-\lambda\cdot t} = 1-e^{-\lambda\cdot t} = 0{,}9$$

ahonnan $-\lambda\cdot t = \ln(0{,}1)$ és $t = -\ln(0{,}1)/\lambda \approx -\ln(0{,}1)/0{,}20066 \approx \mathbf{11{,}47}$ (perc).

(e3) Legyen ξ a hívás hossza, θ_A a folytonos alapon számlázott díj, θ_B a perc alapon számlázott díj. Ekkor

$$M(\theta_A) = 20\cdot M(\xi) = \mathbf{40\ Ft} \quad \text{és} \quad M(\theta_B) = 15\cdot M([\xi]+1)$$

ahol $[\xi]$ egész része ξ -nek. Ismert ([SzI 2021]), hogy $\eta=[\xi]+1$ geometriai eloszlás a $p_\eta = 1-e^{-\lambda}$ paraméterrel, ahol $\lambda_\xi = {}^1/_{M(\xi)}$ a ξ valószínűségi változó paramétere. Esetünkben $\lambda_\xi = {}^1/_2$ és $p_\eta = 1-e^{-1/2} \approx 0{,}393\,47$, tehát $M(\eta) = 1/p_\eta = 1/(1-e^{-1/2}) \approx 2{,}5415$ és

$$M(\theta_B) = 15\cdot M(\eta) = 15/(1-e^{-1/2}) \approx \mathbf{38{,}12\ Ft}\ .$$

Megjegyzés: Ha a B társaság percdíja 16Ft/perc, akkor a fizetendő díj $M(\theta_B) \approx 40{,}66$ Ft.

(e4) a) Egy gumi (átlagos) élettartama, ξ exponenciális eloszlás, $M(\xi) = 1/\lambda = 30.000$ (km), tehát $\lambda = 1/30.000$ (1/km), így P(egy gumi kibírja az utat) =

$P(\xi \geq 6342) = 1-F_\xi(6342) = 1-(1-\exp(-1/30.000\cdot 6342)) = e^{-6342/30.000} \approx \mathbf{0{,}80945} \approx 81\%$.

b) Négykerekű autó esetén $P(\text{mind kibírja}) \approx 0{,}80945^4 \approx \mathbf{0.4293} \approx 43\%$.

Normális eloszlás

(**N1)**

$$P(\xi > 29) = 1 - P(\xi > 29) = 1 - F(29) = 1 - \Phi\left(\frac{29-31}{6}\right) = 1 - \Phi(-0{,}3333) = 1 - 1 + \Phi(0{,}3333) = \Phi(0{,}3333) = 0,$$

≈ **62,93%** valószínűséggel lesz egy szelet 39 grammos.

(N2) Legyen ξ = "*valódi hőmérséklet*", ζ = "jósolt hőmérséklet", normális eloszlások. Ekkor a feladat szerint $\eta = \xi - \zeta \sim N(-2,4)$. A kérdés: $P(20<\xi<24)$, de mivel $\zeta = 22$, ezért $20<\xi<24$ azonos a $20-22<\xi-\zeta<24-22$ azaz $-2<\eta<2$ feltétellel, vagyis

$$P(20<\xi<24) = P(-2<\eta<2) = F_\eta(2) - F_\eta(-2) = \Phi(^{(2-(-2))}/_4) - \Phi(^{(-2-(-2))}/_4) = \Phi(1) - \Phi(0) \approx$$

$$\approx 0{,}8413 - 0{,}5000 \approx \mathbf{0{,}3413} \approx 34\% .$$

(N3) $P(\xi<102) = F_\xi(102) = \Phi(^{(102-100)}/_\sigma) = \Phi(^2/_\sigma) = 0{,}99$.

A táblázat szerint $\Phi(2{,}34) = 0{,}99$, ahonnan $^2/_\sigma = 2{,}34$ és $\sigma = {}^2/_{2{,}34} \approx$ **0,8547** (dkg) .

(N4) $P(180<\xi) = 1 - P(\xi<180) = 1 - F_\xi(180) = 1 - \Phi(^{(180-190)}/_{11}) \approx 1 - \Phi(-0{,}909) =$

$$= 1 - (1 - \Phi(0{,}909)) = \Phi(0{,}909)) \approx \mathbf{0{,}8186} \approx 82\% .$$

(N5) $\eta = \xi_1 + ... + \xi_8$ esetén $\eta \sim N(m_\eta, \sigma_\eta)$ ahol $m_\eta = 8*75 = 600$ és

$\sigma_\eta = \sqrt{8} * 15 \approx 2{,}8284 * 15 \approx 42{,}4264$.

A kérdés: mekkora x esetén lesz $P(\eta<x) = 0{,}99$? Nyilván $P(\eta<x) = \Phi(^{(x-600)}/_{42{,}43})$, és mivel $\Phi(2{,}34) = 0{,}99$, ezért $^{(x-600)}/_{42{,}43} = 2{,}34$, ahonnan $x = 698{,}5 \approx 700$(kg) .

(N6) Legyen $\xi \sim N(4;0{,}7)$ egy nap felhasznált cement, így az egy heti felhasználás $\eta = \xi_1 + + ... + \xi_5$, ahol $\eta \sim N(m_\eta, \sigma_\eta)$, $m_\eta = 5*4 = 20$ és $\sigma_\eta = \sqrt{5} * 0{,}7 \approx 1{,}5652$.
Tehát

$P(\eta<19) = F_\eta(19) = \Phi(^{(19-20)}/_{1{,}565}) \approx \Phi(-0{,}639) = 1 - \Phi(0{,}639) \approx 1 - 0{,}7389 \approx$ **0,2611** $\approx 26\%$,

vagyis Peti sürgősen keressen más állást, vagy hozzon otthonról min. 2q cementet, mert

$P(\eta<21) = F_\eta(21) = \Phi(^{(21-20)}/_{1{,}565}) \approx \Phi(0{,}639) \approx \underline{0{,}7389} \approx \underline{74}\%$.

(N7) $P(\textit{ffi}>\textit{nő}) = P(\textit{ffi}-\textit{nő}>0) = ?$, $\eta = \textit{ffi}-\textit{nő} \sim N(m_\eta, \sigma_\eta)$ ahol $m_\eta = 190-180 = 10$ és

$\sigma_\eta = \sqrt{(11^2+10^2)} \approx 14{,}8661$, tehát

$P(\textit{ffi}>\textit{nő}) = P(\eta>0) = 1 - P(\eta<0) = 1 - F_\eta(0) = 1 - \Phi(^{(0-10)}/_{14{,}86}) \approx 1 - \Phi(-0{,}6727) =$

$$= 1 - (1 - \Phi(0{,}6727)) = \Phi(0{,}6727) \approx \mathbf{0{,}7486} \approx 75\% .$$

Centrális határeloszlás tétel

(C1) Legyen η a *megjelenők* száma, ekkor η valójában binomiális eloszlású, $m_\eta = np = 300\cdot 0.9 = 270$ várható értékkel és $\sigma_\eta = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{300\cdot 0.9\cdot 0.1} = 5.2$ szórással.
A CHT szerint η normális eloszlással közelíthető, így

a)

$$P(260 \le \eta < 280) = F_\eta(280) - F_\eta(260) \approx \Phi\left(\frac{280-270}{5.2}\right) - \Phi\left(\frac{260-270}{5.2}\right) = 2\Phi(1.92) - 1 = 0.945 \approx \mathbf{95\%}$$

b) $x = ?$: $\boldsymbol{P(\eta < x) = 0.9}$, tehát $\boldsymbol{F_\eta(x) = 0.9 = \Phi\left(\frac{x-270}{5.2}\right) = 0.9}$,

ahonnan $\frac{\boldsymbol{x}-270}{5.2} = 1.28$ és $\boldsymbol{x = 276.6}$.

c) Ha a *bejelentkezett* személyek száma n , akkor $m_\eta = n\cdot p = n\cdot 0.9$ és $\sigma_\eta = \sqrt{(n\cdot 0.9\cdot 0.1)} = 0.3\cdot\sqrt{n}$. A feladat kérése $P(\eta < 300) = 0.99$, tehát

$$\phi\left(\frac{300 - n0.9}{0.3\sqrt{n}}\right) = 0.99 \;\Rightarrow\; \frac{300 - n\cdot 0.9}{0.3\sqrt{n}} = 2.32 \;\Rightarrow\; n0.9 + 0.696\sqrt{n} - 300 = 0$$

$$\Rightarrow\; \sqrt{n} = \frac{-0.696 \pm \sqrt{0.696^2 + 1200\cdot 0.9}}{1.8} = 17.87 \;\Rightarrow\; n \approx \mathbf{319}\ .$$

(C2) **a)** $\lambda_\xi = 1/M(\xi) = 1/2000 = 0{,}0005$, így

$$P(1500 < \xi < 3000) = F_\xi(3000) - F_\xi(1500) = 1 - e^{-0.75} - (1 - e^{-1.5}) = 0.25 = 25\%$$

b) $(\xi_1 + \ldots + \xi_{100})/100$ már normális eloszlás, várható értéke $m = m_\xi \cdot 100/100 = m_\xi = 2000$ és szórása $\sigma = \sigma_\xi / \sqrt{100} = 200$, hiszen $\sigma_\xi = 1/\lambda_\xi = 2000$ volt, vagyis $\bar{\xi} \sim N(2000, 200)$. Így

$$P(1500 < \bar{\xi} < 3000) \approx \phi\left(\frac{3000-2000}{200}\right) - \phi\left(\frac{1500-2000}{200}\right) = 1 - (1 - \phi(2.5)) = 0.9938\ .$$

c) $P(\xi \ge x) = 0.98 \;\Rightarrow\; 1 - F_\xi(x) = 0.98 \;\Rightarrow\; e^{-\frac{x}{2000}} = 0.98 \;\Rightarrow\; x = -2000\ln 0.98 = 40.4$.

d) $P(\bar{\xi} \ge x) = 0.98 \;\Rightarrow\; 1 - F_{átlag}(x) = 0.98 \;\Rightarrow\; 1 - \phi\left(\frac{x-2000}{200}\right) = 0.98 = \phi(2.06) \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \frac{x-2000}{200} = -2.06 \;\Rightarrow\; x = \mathbf{1588}\ .$$

e) $P(2000-x < \xi < 2000+x) = F(2000+x) - F(2000-x) = 0.8 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; 1 - e^{-(2000+x)/2000} - (1 - e^{-(2000-x)/2000}) = 0.8 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 1 - e^{-1}\cdot e^{-x/2000} - 1 + e^{-1}\cdot e^{x/2000} = e^{-1}\cdot(-e^{-x/2000} + e^{x/2000}) = 0.8 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -e^{-x/2000} + e^{x/2000} = 0.8\cdot e = 2.17 \;\Rightarrow\; e^{x/2000} = y \;\Rightarrow\; y^2 - 2{,}17y - 1 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y_{1,2} = \frac{2.17 \pm \sqrt{2.17^2 + 4}}{2} = . \;\Rightarrow\; y_1 = 2.56\ ,\ y_2 = negatív \text{ nem jó},$$

$$\Rightarrow\; x_1 = 2000\cdot \ln 2.56 = 1880\ .$$

Tehát az intervallum: (2000-1880, 2000+1880) = **(120, 3880)** .

f) A "*k*-*szor szigma szabály*" alapján $P(m-k\sigma<\xi<m+k\sigma)=2\Phi(k)-1=0.8$ => => $\Phi(k)=1.8/2=0.9=\Phi(1.28)$ => $k=1.28$,

Tehát az intervallum: $(2000-1.28\cdot200,\ 2000+1.28\cdot200)$ = **(1744, 2256)**.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy 100 izzó *átlagára* vonatkozó intervallum sokkal *szűkebb*, mint egyetlen izzóé, hiszen 100 izzó átlagának *szórása* kisebb (1/10 része) egy izzóénál.

(C3) ξ Bernoulli eloszlású, $m_\xi=1000\cdot{}^1/_6$, $\sigma_\xi=\sqrt{(1000\cdot{}^1/_6\cdot{}^5/_6)}$, de n=1000 miatt ξ-t normálisnak is tekinthetjük.

a) A relatív gyakoriság $\zeta=\xi/1000$, és a fentiek alapján

$$\zeta:=\zeta_{1000}\ \sim\ N(m_\xi/1000,\ \sigma_\xi/1000)\ =\ N\mathbf{(}{}^1/_6\ ,\ \sqrt{({}^1/_6\cdot{}^5/_6\ /1000)}\mathbf{)}\ \approx\ N(0.1667,\ 0.0118)\ ,$$

és

$$P(0.16<\zeta<0.17)\ \approx\ \Phi(^{(0.17-0.1667)}/_{0.0118})\ -\ \Phi(^{(0.16-0.1667)}/_{0.0118})\ \approx\ \Phi(0.28)-\Phi(-0.57)\ \approx$$

$$\approx\ 0{,}6103\ -\ (1-0{,}7157)\ \approx\ \mathbf{0{,}3260}\ \approx\ 33\%\ .$$

b) A "*k*-*szor szigma szabály*" alapján $P(m-k\sigma<\xi<m+k\sigma)=2\Phi(k)-1=0.9$ => => $\Phi(k)=1.9/2=0.95\approx\Phi(1.645)$ => $k\approx1.645$,

tehát az intervallum: $({}^1/_6-1.645\cdot0.0118\ ,\ {}^1/_6+1.645\cdot0.0118)\ \approx$ **(0,1473, 0,1861)** .

c) *n* gurítás esetén, az a) részhez hasonlóan $\zeta_n\sim N\mathbf{(}{}^1/_6\ ,\ \sqrt{({}^1/_6\cdot{}^5/_6\ /n)}\mathbf{)}$, majd a "*k*-*szor szigma szabály*" alkalmazásához először *k*-t kell megkeresnünk $(m_\zeta={}^1/_6)$:

$$|\zeta_n-{}^1/_6|<0.01=k\cdot\sigma_\zeta=k\cdot\sqrt{({}^1/_6\cdot{}^5/_6\ /n)}\ \Rightarrow\ k=0.01/\sqrt{({}^1/_6\cdot{}^5/_6\ /n)}\approx0.0268\cdot\sqrt{n}\ ,$$

tehát

$$P(|\zeta_n-{}^1/_6|<0.01)=2\cdot\Phi(k)-1\approx2\cdot\Phi(0.0268\ \sqrt{n})-1=0.9\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \Phi(0.0268\ \sqrt{n})=1.9/2=\ 0.95\approx\Phi(1.645)\ \Rightarrow\ 0.0268\ \sqrt{n}\approx1.645$$

$$\Rightarrow\ n\approx(1.645/0.0268)^2\approx3767{,}58\approx\mathbf{3768}\ .$$

Tehát a kockát legalább **3768** -szor kell feldobnunk.

(C4) ξ valójában Bernoulli eloszlás, tehát

$$P(\xi=50)=\binom{100}{50}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{50}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{50}=\binom{100}{50}\cdot\frac{1}{2^{100}}$$

I. megoldás: Zsebszámológéppel reménytelen ezt kiszámolni, tehát használjuk a *Stirling* formulát:

$$\binom{100}{50}\cdot\frac{1}{2^{100}}=\frac{100!}{(50!)^2\cdot2^{100}}\approx\frac{\left(\frac{100}{e}\right)^{100}\cdot\sqrt{2\pi100}}{\left(\left(\frac{50}{e}\right)^{50}\cdot\sqrt{2\pi50}\right)^2\cdot2^{100}}=\frac{\left(\frac{100}{e}\right)^{100}\cdot\sqrt{2\pi100}}{\left(\frac{50}{e}\right)^{100}\cdot100\pi\cdot2^{100}}=$$

$$=\left(\frac{100}{e}\cdot\frac{e}{50}\cdot\frac{1}{2}\right)^{100}\cdot\frac{\sqrt{2\pi100}}{100\pi}=\sqrt{\frac{2}{100\pi}}=\sqrt{\frac{1}{50\pi}}\approx\mathbf{0.079\ 788}\approx8\%$$

II. megoldás: Közelítsük ξ -t η Poisson eloszlással: $\lambda = m_\xi = 100 \cdot {}^1/_2 = 50$, és ismét a Stirling formulát használjuk:

$$P(\xi = 50) = e^{-50} \cdot \frac{50^{50}}{50!} \approx \frac{50^{50}}{e^{50} \cdot \left(\frac{50}{e}\right)^{50} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 50}} = \frac{1}{\sqrt{100\pi}} \approx 0.056\ 419 \approx 5.6\%$$

Megjegyzés: azért kaptunk jelentősen eltérő eredményt, mert ξ és η is jelentősen eltérnek:

$$\sigma_\eta = \sqrt{\lambda} = \sqrt{50} \approx 7.071\,068 \boxed{\neq} \sigma_\xi = \sqrt{100 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}} = 5$$

aminek az az oka, hogy $p = {}^1/_2$ messze van 0 -tól.

III. megoldás: Közelítsük ξ -t a Moivre Laplace képlettel: $m = m_\xi = 100 \cdot {}^1/_2 = 50$, $\sigma_\xi = \sqrt{(100 \cdot {}^1/_2 \cdot {}^1/_2)} = 5$, tehát

$$P(49.5 < \xi < 50.5) = \Phi\left(\frac{50.5 - 50}{5}\right) - \Phi\left(\frac{49.5 - 50}{5}\right) = \Phi(0.1) - (1 - \Phi(0.1)) =$$

$$= 2 \cdot \Phi(0.1) - 1 = 2 \cdot \mathrm{NormalDist}(0.1) - 1 \approx \mathbf{0.079\ 656} \approx 8\%$$

Megjegyzés: Hasonló számolásokkal kapjuk:

$$P(49.9 < \xi < 50.1) \approx 0.016 = 1.6\% \quad \text{és} \quad P(49.1 < \xi < 50.9) \approx 0,1428 = 14\%$$

Az eltérések oka nyilvánvaló, és a tanulság az, hogy a "*pontosan* 50 fej" kijelentést folytonos valószínűségi változó esetén nem mindegy, hogy milyen intervallummal jelképezzük.

b) Szintén a Moivre-Laplace tétellel számolunk, az a) részhez hasonlóan:

$$P(59 < \xi) = 1 - \Phi\left(\frac{59 - 50}{5}\right) = 1 - \Phi(1.8) = 1 - \mathrm{NormalDist}(1.8) \approx$$

$$\approx 1 - 0.964 = \mathbf{0.036} \approx 3.6\%$$

c)

$$P(55 < \xi) = 1 - \Phi\left(\frac{55 - 50}{5}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - \mathrm{NormalDist}(1) \approx 1 - 0.841 = \mathbf{0.159} \approx 16\%$$

d)

$$P(45 \le \xi \le 55) = \Phi\left(\frac{55 - 50}{5}\right) - \Phi\left(\frac{45 - 50}{5}\right) = 2 \cdot \Phi(1) - 1 = 2 \cdot \mathrm{NormalDist}(1) - 1 \approx$$

$$\approx 2 \cdot 0.841345 - 1 = \mathbf{0.682\,69}\ ,$$

$$P(44 < \xi < 56) = \Phi\left(\frac{56 - 50}{5}\right) - \Phi\left(\frac{44 - 50}{5}\right) = 2 \cdot \Phi(0.8) - 1 = 2 \cdot \mathrm{NormalDist}(0.8) - 1 \approx$$

$$\approx 2 \cdot 0.788\,145 - 1 = \mathbf{0.576\,29}\ .$$

Megjegyzések ([SzG]): Meglepő módon az a) esemény valószínűbb, mint b). Annak valószínűsége viszont, hogy **c)** legalább 55 fejet dobunk, már kb. 16%, vagyis ez a valószínűség kétszerese **a)** esélyének, ellentétben **b)** valószínűségével, ami **a)** valószínűségének még a felét sem érte el.

Felhasznált és ajánlott irodalom

[JI 1991] Joó István: *Egy elemi kombinatorikai probléma*, Matematikai Lapok, 1993,15-18.

[KoMaL] Csatár Katalin, Harró Ágota, Hegyi Györgyné, Lövey Éva, Morvai Éva, Széplaki Györgyné, Ratkó Éva: *Valószínűségszámítási feladatok*
https://www.komal.hu/cikkek/valszam/valszam.h.shtml

[MGy] Miholcsa Gyula: *Labirintus - logikai és egyéb fejtörők*, Appendix könyvkiadó 2001, Marosvásárhely.

[MOE] Mihálykóné Orbán Éva: *Valószínűségszámítási példatár informatikusoknak*, Typotex, 2011, https://dtk.tankonyvtar.hu/handle/123456789/7496

[RA] Robin,A.C.: *A quick approximation to the normal integral*, The Math. Gazette vol 81, (1997) March, pp. 95-96.

[SzG] Székely J. Gábor: *Paradoxonok a véletlen matematikájában*, Műszaki Kiadó, Budapest 1982, Typotex Kiadó, Budapest, 2004.

[SzI 1991] Szalkai István: *Diszkrét matematika feladatgyűjtemény*, Veszprémi Egyetemi kiadó, 1991.

[SzI 1993] Szalkai István, Velleman,D.J.: *Versatile Coins* , Amer.Math.Monthly 100 (1993) pp. 26-33.

[SzI 1995b] Szalkai István, Velleman,D.J.: *Rugalmas pénzérmék*, Matematikai Lapok, 1992/3-4, (1995), 23-38. old.

[SzI 1999c] Szalkai István: *Egymásba ágyazott FOR-ciklusok alkalmazása*, Polygon, IX (1999) 55-58. old.

[SzI 2006] Szalkai István: *Diszkrét matematika és algoritmuselmélet alapjai*, Veszprémi Egyetemi Kiadó, 2006.

[SzI 2012a] Szalkai István: *Mindennapi matematika*, BJMT 2012,
https://www.bolyai.hu/files/Veszpr_2020_Mindennapi_mat-201015.pdf

[SzI 2012b] Szalkai István: *Szemléletes analízis* I., Tankönyvtár, 2012.
https://dtk.tankonyvtar.hu/handle/123456789/3129

[SzI 2021] Szalkai István: Valószínűségszámítás alapjai szemléletesen, 2021,
http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/walszam2021.pdf

[SzI 2022] Szalkai István: *Mesék a valószínűségszámításból* II., Haladvány Kiadvány, 2022.
http://math.bme.hu/~hujter/220318.pdf , http://math.bme.hu/~hujter/halad.htm

[TR] Tokić Rudolf: *Valószínűségszámítási paradoxonok*, érettségi dolgozat, Zenta, 2014.
http://members.tippnet.rs/beres/01_diakjaim_altal/Tokic_Rudolf.pdf

[wiki-MH] Wikipédia: *Monty_Hall-paradoxon*
https://**hu**.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall-paradoxon
https://**en**.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem

[wiki-Norm] Wikipedia: *Normal_distribution* ,
https://**en**.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution

https://**fr**.wikipedia.org/wiki/Loi_normale

[wiki-Odds] Wikipedia: *Odds*,
https://**en**.wikipedia.org/wiki/Odds
https://**de**.wikipedia.org/wiki/Chance_(Stochastik)
https://**fr**.wikipedia.org/wiki/Cote_(probabilités)

[wiki-Szub] Wikipédia: *Szubfaktoriális*,
https://**hu**.wikipedia.org/wiki/Faktoriális => Szubfaktoriális
https://**en**.wikipedia.org/wiki/Derangement
https://**fr**.wikipedia.org/wiki/Probléme_des_rencontres

[wiki-Szul] Wikipédia: *Születésnap paradoxon*,
https://**hu**.wikipedia.org/wiki/Születésnap-paradoxon
https://**en**.wikipedia.org/wiki/Birthday_problem