Az Euklideszi algoritmus és a lánctörtek

Haladvány Kiadvány 230215

Szalkai István
Pannon Egyetem, Matematika Tanszék, Veszprém
SZALKAI.ISTVAN@MIK.UNI-PANNON.HU

Bevezetés

Az *Euklideszi algoritmust* elsősorban a számelméletben, nagy számok *lnko* és *lkkt* kiszámolásához, valamint a véges testek előállításához, stb., a *lánctörteket* pedig irracionális számok közelítésére (approximáció) használjuk. Jelen cikkünkben, Knuth [3] nyomán "felfedezzük" e két algoritmus nagymérvű egyezőségét.

Euklidesz több, mint kétezer évvel ezelőtt geometriai szakaszok (valós számok) *összemérhetőségét* (van-e közös egység), vagyis lnko-ját határozta meg ([7], [2]), de a módszer változtatás nélkül alkalmas többszázjegyű számok legnagyobb közös osztójának rendkívül gyors meghatározására is (prímfelbontás nélkül). A (modern) Euklideszi algoritmussal csak még most ismerkedő Olvasóknak [8] könyvünket és [5] feladatgyűjteményünket ajánljuk. A lánctörtekkel [10] -ben ismerkedhetünk meg. [10] szerint Bolyai Farkas szintén foglalkozott lánctörtekkel, de a hivatkozott [4] link sajnos nem él.

Mindkét algoritmust részletesen elemzi és *nagyon sok egyéb* (sok meglepő) alkalmazását említi meg Knuth [3] könyve a 4. fejezetben.

Racionális szám lánctört alakja

Adott $u > v$ (pozitív) egész számok, keresendőek $x_1, ..., x_n, ... \in \mathbb{N}$, amelyekre:

$$\frac{v}{u} = \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \cfrac{1}{x_4 + ...}}}} \quad , \tag{1}$$

másképpen: $\frac{v}{u} = \cfrac{1}{x_1 + z_1} = \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + z_2}} = \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + z_3}}} = ...$

ahol $0 < z_i < 1$.

Tehát:

$$\frac{v}{u} = \frac{1}{x_1 + z_1} \quad <=> \quad u = vx_1 + vz_1 = v \cdot x_1 + r_1 \ , \qquad \left(z_1 = \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3 + \frac{1}{x_4 + ...}}} \right)$$

$$r_1 = vz_1 = \frac{v}{x_2 + z_2} <=> v = r_1x_2 + r_1z_2 = r_1 \cdot x_2 + r_2 \ , \qquad \left(z_2 = \frac{1}{x_3 + \frac{1}{x_4 + ...}} \right)$$

$$r_2 = r_1z_2 = \frac{r_1}{x_3 + z_3} <=> r_1 = r_2x_3 + r_2z_3 = r_2 \cdot x_3 + r_3 \ , \qquad \left(z_3 = \frac{1}{x_4 + ...} \right)$$

$$r_3 = r_2z_3 = \frac{r_2}{x_4 + z_4} <=> r_2 = r_3x_4 + r_3z_4 = r_3 \cdot x_4 + r_4 \ , \qquad \ldots$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

vagyis a keresett $x_1, ..., x_n, ...$ számok éppen az Euklideszi algoritmus *hányadosai* !

Mellékesen bebizonyítottuk a következő összefüggést:

Tétel: *Egy lánctört* akkor és csak akkor *véges, ha racionális.* (Ha a lánctört véges, akkor $x_n \in \mathbb{N}$ miatt (1) is racionális. Ha $\frac{v}{u}$ racionális, akkor a fenti algoritmus végetér, mert $v > r_1 > r_2 > ...$ nemnegatív egész számok.)

Megemlítjük még ([11]), hogy Joseph-Louis **Lagrange** egy tétele szerint egy lánctört pontosan akkor *periodikus*, ha értéke egy racionális együtthatós másodfokú egyenlet megoldása.

Irracionális szám lánctört alakja

A számolás menete $\alpha \notin \mathbb{Z}$ esetén hasonló az előzőhöz. Sőt, az alábbi számolás racionális $\alpha = \frac{v}{u}$ számokra is változtatás nélkül helyes, csak most nem egész számokkal, hanem kerekítésekkel, valamint 0 és 1 közötti valós számokkal kell foglalkozunk.

Tehát $0 < \alpha < 1$ tetszőleges valós szám, (1) előállítást keresünk $\frac{v}{u}$ helyett α -ra. Nyilván $x_1, ..., x_n, ... \in \mathbb{N}$ és $0 < z_i < 1$ valós számok.

$$\alpha = \frac{1}{x_1 + z_1} \quad <=> \quad \frac{1}{\alpha} = x_1 + z_1 \quad <=> \quad x_1 = \left[\frac{1}{\alpha}\right] \text{ egész rész és } z_1 = \left\{\frac{1}{\alpha}\right\} \text{ törtrész,}$$

$$z_1 = \frac{1}{x_2 + z_2} \quad <=> \quad \frac{1}{z_1} = x_2 + z_2 \quad <=> \quad x_2 = \left[\frac{1}{z_1}\right] \text{ és } z_2 = \left\{\frac{1}{z_1}\right\} \ ,$$

$$z_2 = \frac{1}{x_3 + z_3} \quad <=> \quad \frac{1}{z_2} = x_3 + z_3 \quad <=> \quad x_3 = \left[\frac{1}{z_2}\right] \text{ és } z_3 = \left\{\frac{1}{z_2}\right\} \ ,$$

$$\ldots$$

és innen már látszik az algoritmus. Az algoritmus nyilván végtelen.

Hivatkozások

[1] **Csete Lajos:** *Az Euklideszi algoritmus legrosszabb esete és Gabriel Lamé*, Polygon, 1994, 83-88.

[2] **Euklidész:** *Elemek* (magyarul): Gondolat, 1977, http://mek.oszk.hu/06200/06232 (pdf), http://mek.oszk.hu/00800/00857 (html) , http://mek.iif.hu/06200/06232

[3] **Knuth, D.E.:** *A számítógép-programozás művészete*, 2. kötet, *Szeminumerikus algoritmusok*, Műszaki Kiadó, Budapest, 1987.

[4] **Szabo:** *Bolyai Farkas és a lánctörtek*, http://www.termeszetvilaga.hu/szamok/kulonszamok/k0301/szabo.html - a link nem él!

[5] **Szalkai István:** *Algebra és számelmélet feladatgyűjtemény*, Pannon Egyetem Kiadó, Veszprém, 2005, 2021.

[6] **Szalkai István:** *Újabb kombinatorikai feladatok* (*analízis, algebra,...*), 2008, https://math.uni-pannon.hu/~szalkai/KombUj+Felad2c.pdf

[7] **Szalkai István:** *Az Euklideszi algoritmus* (előadás kivonat), https://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Euklideszi_lnko.pdf

[8] **Szalkai István, Dósa György**: *Algoritmikus számelmélet*, Egyetemi jegyzet digitális mellékletekkel, Typotex Kiadó, 2011, https://dtk.tankonyvtar.hu/handle/123456789/7516

[9] **van der Waerden, B.L.:** *Egy tudomány ébredése*, Gondolat, 1977.

[10] **Wikipédia:** *Lánctörtek*, https://hu.wikipedia.org/wiki/Lánctört , https://en.wikipedia.org/wiki/Continued_fraction , https://de.wikipedia.org/wiki/Kettenbruch

[11] **Wikipédia:** *Másodfokú egyenletek megoldása lánctörtekkel*, https://hu.wikipedia.org/wiki/Másodfokú_egyenletek_megoldása_lánctörtekkel