Amikor a generátorfüggvény racionális törtfüggvény

Szalkai István
Pannon Egyetem, Matematika Tanszék,
Veszprém
SZALKAI.ISTVAN@MIK.UNI-PANNON.HU

Abstract

Általában keressük azon rekurziókat, amelyekhez tartozó sorozatok generátorfüggvénye racionális törtfüggvény.

Haladvány Kiadvány http://math.bme.hu/~hujter/halad.htm
2023.08.15. http://math.bme.hu/~hujter/230815.pdf

0. Bevezetés

Definíció 1 *Az* $\overrightarrow{a} = (a_0, a_1, ...) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *sorozat* generátorfüggvénye $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *ahol* $Dom(F) \subseteq \mathbb{C}$ *tartalmazza a* 0 *egy nemüres környezetét.* □

Kiindulópontunk a következő egyszerű, de fontos észrevétel :

Tétel 2 *([Sz 2001], 6.6.Tétel) Egy* a_n *soroztat generátorfüggvénye pontosan akkor racionális törtfüggvény*[1)] *és* 0 *nem gyöke a nevezőnek, ha a sorozat kielégít egy állandó együtthatójú lineáris homogén, véges rendű rekurziót*[2)].

[1)] két polinom hányadosa

[2)] azaz: $a_n = d_1 a_{n-1} + ... + d_k a_{n-k}$ ha $k \leq n$ és $k \in \mathbb{N}$, $d_1, ..., d_k \in C$, $a_0 = A_0, ..., a_{k-1} = A_{k-1} \in C$ rögzített számok.

Speciálisan: *$F(x)$ számlálójában és nevezőjében pontosan akkor vannak egész együtthatójú polinomok, ha a rekurzióban szereplő együtthatók egész számok, amikor is a sorozat elemei egész számok.*

Hangsúlyozzuk, hogy *bármelyik* sorozat *több* rekurzív összefüggést is kielégíthet!

Az 1. fejezetben több példát mutatunk olyan rekurzív összefüggésekre, amelyek vagy nem homogének vagy nem véges rendűek vagy nem állandó együtthatójúak, mégis az általuk meghatározott sorozat generátorfüggvénye racionális törtfüggvény, vagyis a sorozat kielégít egy **állandó együtthatójú lineáris homogén, véges rendű (ÁELHVR)** *is!* A példák részletes számolásait a 2. Függelékben ismertetjük.

Célunk általában megkeresni azon *rekurzív összefüggések* típusait, ismertető jeleit[3], amelyek által meghatározott sorozat generátorfüggvénye racionális törtfüggvény. A 2. fejezetben sajnos csak néhány eredményt és megjegyzést tudunk felmutatni, néhány részletszámolás az 1. Függelékben található.

A következő 3.Tételben pontosan leírjuk azon *sorozatok* szerkezetét, amelyek kielégítenek egy állandó együtthatójú lineáris homogén, véges rendű rekurziót.

A 2.**Tétel bizonyítása:** $\boxed{\Longleftarrow}$ Ha

$$a_n = d_1 a_{n-1} + ... + d_k a_{n-k} \quad (k \leq n) \tag{1}$$

és a kezdeti értékek

$$a_0 = A_0, ..., a_{k-1} = A_{k-1} \tag{2}$$

ahol $d_i, A_i \in \mathbb{C}$ és $k \in \mathbb{N}$ adottak, akkor (1) mindkét oldalát beszorozva x^n -el és az egyenleteket összegezve $k \leq n$ esetére kapjuk:

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = d_1 x \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + ... + d_k x^k \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} x^{n-k} \tag{3}$$

azaz

$$F(x) - \sum_{n=0}^{k-1} A_n x^n = d_1 x \left(F(x) - \sum_{n=0}^{k-2} A_n x^n \right) + ... + d_{k-1} x^{k-1} \cdot \left(F(x) - A_0 x^0 \right) + d_k x^k F(x) \tag{4}$$

[3] vagy legalábbis minél több ilyen nem ÁELHVR rekurziót találni

ahonnan

$$F(x) = \frac{\sum_{n=0}^{k-1} A_n x^n - \sum_{j=1}^{k-1} \left(d_j x^j \sum_{n=0}^{k-j-1} A_n x^n \right)}{1 - \sum_{j=1}^{k} d_j x^j} \ . \tag{5}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Ha

$$F(x) = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} g_i x^i}{\sum_{j=0}^{k} h_j x^j} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{6}$$

akkor

$$\sum_{i=0}^{k-1} g_i x^i = \left(\sum_{j=0}^{k} h_j x^j \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \tag{7}$$

és

$$0 = \sum_{j=0}^{k} h_j \cdot a_{n-j} \tag{8}$$

$n \geq k$ esetén, ami $h_0 \neq 0$ miatt valóban egy állandó együtthatójú lineáris homogén, k -rendű rekurzió:

$$a_n = -\frac{h_1}{h_0} a_{n-1} - ... - \frac{h_k}{h_0} a_{n-k} \ . \tag{9}$$

□

Hasznos lesz még [Sz 2001] másik eredménye és annak általánosítása is:

Tétel 3 *([Sz 2001] 5.12.Tétel) Legyenek egy állandó együtthatójú k -adrendű lineáris homogén rekurzió karakterisztikus egyenletének különböző gyökei $q_1, ..., q_t \in C$, algebrai multiplicitásaik legyenek rendre $m_1, ..., m_t \in N$ $(m_1 + ... + m_t = k)$. Ekkor a rekurzió általános megoldása*

$$\begin{aligned} a_n \ : \ & = c_1^1 \cdot q_1^n + c_2^1 \cdot n \cdot q_1^n + c_3^1 \cdot n^2 \cdot q_1^n + ... + c_{m_1}^1 \cdot n^{m_1 - 1} \cdot q_1^n + \\ & + c_1^2 \cdot q_2^n + c_2^2 \cdot n \cdot q_2^n + c_3^2 \cdot n^2 \cdot q_2^n + ... + c_{m_2}^1 \cdot n^{m_2 - 1} \cdot q_2^n + \\ & ... \\ & + c_1^t \cdot q_t^n + c_2^t \cdot n \cdot q_t^n + c_3^t \cdot n^2 \cdot q_t^n + ... + c_{m_t}^t \cdot n^{m_t - 1} \cdot q_t^n \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \tag{10}$$

alakú, ahol $c_j^i \in C$ tetszőleges komplex számok, ha $j \leq m_i$, $i \leq t$. □

A Tétel megfordítása is könnyen igazolható:

Tétel 4 *Egy a_n sorozat* pontosan akkor *elégít ki egy állandó együtthatójú lineáris homogén, véges rendű rekurzió rekurziót (vagyis generátorfüggvénye racionális törtfüggvény), ha a sorozat kvázipolinom (n -ben), azaz $a_n = q(n)$ kvázipolinom.*

Bizonyítás: Írjuk az $a_n = q(n)$ kvázipolinomot (10) alakban. Legyen

$$x^k - d_1 x^{k-1} - ... - d_0 = 0 \tag{11}$$

egy olyan egyenlet, melynek különböző gyökei $q_1, ..., q_t \in C$ az $m_1, ..., m_t$ algebrai multiplicitásokkal, $m_1 + ... + m_t = k$. Ekkor az a_n sorozat bármely $a_0 = A_0$, ... , $a_k = A_k$ kezdeti éretékekkel (azaz bármely $c_j^i \in \mathbb{C}$ számokkal) kielégíti az

$$a_n = d_1 a_{n-1} + ... + d_k a_{n-k} \quad (k \leq n) \tag{12}$$

rekurziót. □

1. Néhány példa

A következő példák részletes számolásai a 3.2. Függelékben találhatók.

Példa 5 *Hanoi tornyainak jól ismert rekurzív összefüggése $h_n = 2h_{n-1}+1 \quad (1 \leq n)$, $h_0 = 0$. Beszorozva x^n -el és összegezve kapjuk*

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n \cdot x^n = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} h_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 2x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} h_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

amiből

$$F(x) - h_0 x^0 = 2x \cdot F(x) + \frac{x}{1-x} \tag{13}$$

és

$$F(x) \cdot (1-2x) = \frac{x}{1-x} + 0 \ , \tag{14}$$

így

$$F(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{x}{2x^2 - 3x + 1} \ ,$$

ami a Tétel alapján adja a $0 = 2h_{n-2} - 3h_{n-1} + h_n$, azaz

$$h_n = 3h_{n-1} - 2h_{n-2} \quad (2 \leq n) \tag{15}$$

rekurzív összefüggést, a $h_0 = 0$, $h_1 = 1$ kezdeti értékekkel. □

A (15) összefüggést eddig még nem találtam meg a szakirodalomban.

Példa 6 *Jelölje S_n azon, n hosszú,* $0,1$ *karaktersorozatok* számát*, amelyekben nem fordul elő a* 010 *részsorozat. Ekkor ([Sz 1997] szerint)*

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-3} + S_{n-4} + ... + S_0 + 2 \quad (3 \leq n) \tag{16}$$

és

$$S_0 = 1,\ S_1 = 2,\ S_2 = 4\ . \tag{17}$$

A generatorfüggvény (lásd 2. fejezet)

$$F(x) = \frac{x^2+1}{-x^3+x^2-2x+1}\ , \tag{18}$$

tehát S_n kielégíti a $-S_{n-3} + S_{n-2} - 2S_{n-1} + S_n = 0$ *,*
azaz

$$S_n = 2S_{n-1} - S_{n-2} + S_{n-3} \quad (4 \leq n) \tag{19}$$

rekurzív összefüggést az $S_0 = 1$, $S_1 = 2$, $S_2 = 4$, $S_3 = 7$ *kezdeti értékekkel.* □

Példa 7 *Egy érmét n -szer feldobva, hány dobássorozatban fordul elő az FII részsorozat? Ha S_n jelöli az ilyen n -hosszú dobássorozatok számát, akkor* $4 \leq n$ *esetén (lásd [Sz 1997])*

$$S_n = (n-2)\cdot 2^{n-3} - 2^0 \cdot S_{n-3} - 2^1 \cdot S_{n-4} - ... - 2^{n-3} \cdot S_0 \tag{20}$$

és

$$S_0 = S_1 = S_2 = 0, \quad S_3 = 1. \tag{21}$$

A generátorfüggvény (lásd 2. fejezet)

$$F(x) = \frac{x^3}{-(2x-1)(x-1)(x+x^2-1)} = \frac{x^3}{-2x^4+x^3+4x^2-4x+1}\ , \tag{22}$$

tehát S_n kielégíti a $-2S_{n-4} + S_{n-3} + 4S_{n-2} - 4S_{n-1} + S_n = 0$ *, azaz*

$$S_n = 4S_{n-1} - 4S_{n-2} - S_{n-3} + 2S_{n-4} \quad (4 \leq n) \tag{23}$$

rekurzív összefüggést az $S_0 = S_1 = S_2 = 0$, $S_3 = 1$ *kezdeti értékekkel.* □

Példa 8 *(Pénzváltási probléma, [Sz 2001]): Jelölje a_n azon lehetőségek számát, ahányféleképpen ki tudunk fizetni n forintot 2 és 3 forintos pénzérmékkel, azaz hány nemnegatív gyöke ($x, y \in \mathbb{N}$) van a*

$$2y + 3z = n \tag{24}$$

egyenletnek.

Ismert ([Sz 2001]), hogy az a_n sorozat generátorfüggvénye

$$F(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{1}{x^5 - x^3 - x^2 + 1} \ , \tag{25}$$

tehát $a_{n-5} - a_{n-3} - a_{n-2} + a_n = 0$, *azaz*

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-5} \quad (5 \leq n) \tag{26}$$

és $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = a_4 = 1$. □

Megjegyzés 9 *A (26) rekurzió közvetlenül is belátható a (24) egyenlet vizsgálatával.*

Példa 10 *(Általános pénzváltási probléma): Legyenek adottak a pozitív $h_1, ..., h_k$ számok, és jelölje a_n a következő egyenlet megoldásainak számát:*

$$h_1 y_1 + ... + h_k y_k = n \tag{27}$$

Ismert ([Sz 2001]), hogy

$$F(x) = \frac{1}{(1-x^{h_1}) \cdot ... \cdot (1-x^{h_k})} \ , \tag{28}$$

aminek nevezője szintén racionális törtfüggvény, vagyis ez a sorozat is kielégít egy állandó együtthatójú lineáris homogén, véges rendű rekurziót.

Példa 11 *A*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot a_{n-1} \ , \quad a_0 = 1 \tag{29}$$

rekurzió az

$$a_n = n + 1 \tag{30}$$

sorozatot határozza meg, aminek generátorfüggvénye

$$F(x) = \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x^2 - 2x + 1} \ , \tag{31}$$

tehát $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$, *azaz*

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \quad (2 \leq n) \tag{32}$$

és $a_0 = 1$, $a_1 = 2$. □

Megjegyzés 12 *A fenti* a_n *sorozatra nyilván az*

$$a_n = a_{n-1} + 1 \tag{33}$$

rekurzió is "működik".

Példa 13 *Hány olyan, csak számjegyeket tartalmazó,* n *hosszú karaktersorozat van, amely páros sok* 0 *számjegyet tartalmaz?*

Nyilván $a_0 = 1$ *és* $a_1 = 9$, ... *Hogyan kaphatunk* n *hosszú megfelelő sorozatokat? Vagy egy nemnulla számjegyet írunk egy* $n-1$ *hosszú megfelelő sorozat végére, vagy az* n *hosszú megfelelő sorozatunk* 0 *számjegyre végződik. Ez utóbbi esetben a sorozast első* $n-1$ *számjegye egy* nem *megfelelő sorozatot alkot, melyek száma (komplementer)* $10^{n-1} - a_{n-1}$, *vagyis* $a_n = 9a_{n-1} + 10^{n-1} - a_{n-1} =$

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1} \quad (1 \leq n) \, , \ a_0 = 1 \ . \tag{34}$$

Mivel

$$F(x) = \frac{1 - 9x}{(1 - 8x)(1 - 10x)} = \frac{1 - 9x}{1 - 18x + 80x^2} \ , \tag{35}$$

ezért $a_n - 18a_{n-1} + 80a_{n-2} = 0$, *azaz*

$$a_n = 18a_{n-1} - 80a_{n-2} \quad (2 \leq n) \tag{36}$$

és $a_0 = 1$, $a_1 = 9$. □

2. Általános eredmények

Mint a bevezetőben említettük: célunk azon rekurziók felkutatása, amelyek által meghatározott sorozatok generátorfüggvénye racionális törtfüggvény. Sajnos jelenleg csak néhány részeredményünk van.

A 5, 6 és 13. példákhoz hasonlóan:

Tétel 14 *Amennyiben a rekurzió* állandó együtthatójú *lineáris, véges vagy végtelen rendű, és a zavaró tag kvázipolinom, akkor a sorozat generátorfüggvénye racionális törtfüggvény.*

Speciálisan: $F(x)$ *számlálójában és nevezőjében pontosan akkor vannak egész együtthatójú polinomok, ha a rekurzióban szereplő együtthatók, a kvázipolonomok együtthatói és a* b_j *alapok is egész számok, amikor is a sorozat elemei egész számok.*

Bizonyítás: (i) Ha a rekurzió véges rendű:

$$a_n = d_1 a_{n-1} + ... + d_k a_{n-k} + q(n) \quad (k \leq n) \tag{37}$$

akkor a 2. Tétel bizonyítása és a 19. Tétel alapján

$$\begin{aligned} F(x) - \sum_{n=0}^{k-1} A_n x^n = & \qquad (38) \\ & = d_1 x \left(F(x) - \sum_{n=0}^{k-2} A_n x^n \right) + ... + d_{k-1} x^{k-1} \cdot \left(F(x) - A_0 x^0 \right) + \\ & + d_k x^k F(x) + \mathcal{F}_q(x) \ , \end{aligned}$$

ahonnan

$$F(x) = \frac{\sum\limits_{n=0}^{k-1} A_n x^n - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \left(d_j x^j \sum\limits_{n=0}^{k-j-1} A_n x^n \right) + \mathcal{F}_q(x)}{1 - \sum\limits_{j=1}^{k} d_j x^j} \ . \tag{39}$$

(ii) Ha a rekurzió végtelen rendű, akkor a fenti számolást még bonyolítja a dupla összegzés, amit a 6. és 7. Példák megoldásához hasonlóan (lásd a 3.2. alfejezetben) tudunk kezelni. □

A 7. példa mintájára is megfogalmazhatunk általánosabb tételeket, sajnos most csak triviális általánosítást tudnánk nyújtani (nem írjuk le ide).

A 7. és 11. példák alapján többféle *nem állandó együtthatójú* lineáris rekurziók generátorfüggvénye is racionális törtfüggvény, de *általában* a nem állandó együtthatójú lineáris rekurziók megoldása *differenciálegyenletre* vezet (ami a legtöbbször megoldhatatlan), mint az alábbi rövid példa mutatja.

Példa 15 *Legyen*

$$a_n = a_{n-1} + (n-2) \cdot a_{n-2} \quad (2 \leq n), \quad a_0 = A_0,\ a_1 = A_1\ . \tag{40}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x^3 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \cdot (n-2) \cdot x^{n-3} = \\ &= x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x^3 \cdot \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \cdot x^{n-2} \right)' \end{aligned} \tag{41}$$

így

$$F(x) - A_0 x^0 - A_1 x^1 = x \cdot \left(F(x) - A_0 x^0 \right) + x^3 \cdot F'(x) \tag{42}$$

vagyis

$$-x^3 \cdot F'(x) + F(x) \cdot (1-x) = B_1 x + B_0\ , \tag{43}$$

melynek sajnos ***csak transzcendens megoldása*** *van.* □

Nyitott Kérdés: mely *nem állandó együtthatójú lineáris* rekurziók "jók" (generátorfüggvényük racionális törtfüggvény). Többek között a 7. és 11. példák jók.

Bizonyos rekurziók és sorozatok generátorfüggvénye azonban biztosan *nem* racionális törtfüggvény, az 3. Tétel miatt:

K ovetkezmény 16 *Például a faktoriális, szubfaktoriális (derangements), Catalan számok semmilyen rekurzív összefüggése sem jó.*

Például, a szubfaktoriálisra a következő rekurziók ismertek ([Sz 1997], [J]):

1)

$$D_n = n \cdot D_{n-1} + (-1)^n \qquad (1 \leq n) \ , \ D_0 = 1 \tag{44}$$

2)

$$D_n = (n-1) \cdot (D_{n-1} + D_{n-2}) \quad (2 \leq n) \ , \ D_0 = 1, D_1 = 0 \ . \tag{45}$$

□

Általános Nyitott Kérdés: Általában, milyen szerkezetű rekurziók "jók" ?

3. Függelék

3.1. Polinomok és kvázipolinomok

Ebben a fejezetben meghatározzuk a kvázipolinomok $\left(a_n = \sum_{j=1}^{k} b_j^n \cdot p_j(n) \ , \right.$ $\left. p_j(n) \text{ polinomok, } b_j \in \mathbb{C}\right)$ generátorfüggvényeit, amelyek mindig racionális törtfüggvények. A Tétel bizonyításához egy technikai jelölésre és segédállításra van szükségünk.

Definíció 17 *Tetszőleges $i \in \mathbb{N}$ nemnegatív egész számra a $\chi_i(n)$ egész együtthatójú polinomok a következőek: $\chi_0(n) := 1$ és $i \geq 1$ esetén*

$$\chi_i(n) := n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-i+1) \ . \qquad \square \tag{46}$$

Segédtétel 18 *Mivel a $\chi_i(n)$ polinomok fokszámai pontosan $\mathbb{N}$ elemeit adják egyszeresen, és főegyütthatójuk 1 , ezért az egész együtthatójú polinomok vektorterének egy bázisát adják. Vagyis bármely $p(n)$ komplex együtthatójú polinom egyértelműen írható fel*

$$p(n) = \sum_{i=0}^{t} r_i \cdot \chi_i(n) \tag{47}$$

alakban, ahol $r_i \in \mathbb{C}$. Amennyiben $p(n)$ egész együtthatójú, úgy az r_i együtthatók is egészek.

Bizonyítás: *teljes indukcióval a $p(n)$ polinom fokszámára.* □

Tétel 19 ***(i)*** *Tetszőleges* $p(n) = \sum_{i=0}^{t} c_i n^i = \sum_{i=0}^{t} r_i \cdot \chi_i(n) \quad (c_i, r_i \in \mathbb{C})$ *polinomra és* x *komplex számra,* $|x| < 1$ *esetén a* p *polinom generátorfüggvénye*

$$\mathcal{F}_p(x) := \sum_{n=0}^{\infty} p(n) \cdot x^n = \sum_{i=0}^{t} r_i \cdot \frac{d^i}{dx^i} \left(\frac{1}{1-x} \right) \cdot x^i \ . \tag{48}$$

Speciálisan:

$$\mathcal{F}_{n^t}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} n^t \cdot x^n = \frac{d^t}{dx^t} \left(\frac{1}{1-x} \right) \cdot x^t \ . \tag{49}$$

(ii) *Tetszőleges* $q(n) = \sum_{j=1}^{k} b_j^n p_j(n)$ *kvázipolinomra és* x *komplex számra,* $|x| < \varepsilon$ *esetén a* q *kvázipolinom generátorfüggvénye*

$$\mathcal{F}_q(x) := \sum_{n=0}^{\infty} q(n) \cdot x^n = \sum_{j=1}^{k} \mathcal{F}_{p_j}(b_j x) \ . \tag{50}$$

Mivel a $\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{1}{1-x}\right)$ deriváltfüggvények racionális törtek, ezért az $\mathcal{F}_p(x)$ generátorfüggvények is racionális törtfüggvények.

Amennyiben $p\,(n)$ egész együtthatójú, akkor az r_i számok is egész számok, tehát $\mathcal{F}_p(x)$ számlálójában és nevezőjében levő polinomok is egész együtthatósak. Hasonlóan, ha $q\,(n)$ összes együtthatója és a b_j számok is egészek, akkor $\mathcal{F}_q(x)$ számlálójában és nevezőjében levő polinomok is egész együtthatósak.

A 19.Tétel bizonyítás: (i) $\mathcal{F}_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{t} r_i \cdot \chi_i(n) \right) \cdot x^n = \sum_{i=0}^{t} r_i x^i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \chi_i(n) \cdot x^{n-i} =$

$$= \sum_{i=0}^{t} r_i x^i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-i+1) \cdot x^{n-i} = \sum_{i=0}^{t} r_i \cdot \frac{d^i}{dx^i} \left(\frac{1}{1-x} \right) \cdot x^i \ .$$

(ii) $\mathcal{F}_q(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} b_j^n p_j(n) \right) \cdot x^n = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_j(n) \cdot (b_j x)^n \right) = \sum_{j=1}^{k} \mathcal{F}_{p_j}(b_j x) \ .$

□

Az előző tételt általánosíthatnánk negatív kitevőkre, azaz $\mathfrak{p}(n) = \sum_{i=1}^{t} \frac{c_i}{n^i}$ alakú "*törtpolinomokra*" is a következő tétel alapján (a $\mathfrak{p}$ -re való általános számolásokat nem részletezzük):

Tétel 20 *Legyen* $u \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$ *esetén*

$$\mathcal{Q}_u(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n^u \cdot x^n \ . \tag{51}$$

Ekkor

$$\mathcal{Q}_u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & ha\ u = 0 \\ x \cdot \dfrac{d}{dx}\mathcal{Q}_{u-1}(x) & ha\ u > 0 \\ -\ln(-x+1) & ha\ u = -1 \\ \displaystyle\int_0 \frac{\mathcal{Q}_{u+1}(x)}{x} dx & ha\ u < 0 \end{cases} \tag{52}$$

ahol $F = \int_0 f$ *a* 0 *-ban eltűnő primitív függvényt jelöli:* $F(0) = 0$.

Bizonyítás: $u \geq 0$ esetén ez a 19.Tétel (i) speciális esete (most $0^0 = 0$):

$$\mathcal{Q}_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \tag{53}$$

$$\mathcal{Q}_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^u \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x \cdot \left(n^{u-1} \cdot x^n\right)' = x \cdot \left(\mathcal{Q}_{u-1}(x)\right)' \ , \tag{54}$$

$$\mathcal{Q}_{-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(-x+1) \tag{55}$$

a közismert Taylor sor, míg $u < 0$ esetén :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_u(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^u x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{u+1} \int_0 x^{n-1} dx \right) = \\ &= \int_0 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{u+1} x^{n-1} \right) dx = \int_0 \frac{\mathcal{Q}_{u+1}(x)}{x} dx \quad . \end{aligned} \tag{56}$$

□

A fenti tétel csak másik megvilágítása az $u > 0$ eseteknek, az "$u < 0$" eset pedig (u előjelétől függetlenül) következik az "$u > 0$" esetekből.[4)]

Azonban az $u < 0$ eset csak érdekesség, mert az integrálok már $u < -1$ esetén sem számolhatók ki, tehát messze nem racionális törtfüggvények!

Megjegyzés 21 $\mathcal{Q}_u(x) = \mathcal{F}_{x^u}(x)$ *és* $\mathcal{F}_p(x) = \sum_{i=0}^{t} c_i \mathcal{Q}_i(x)$ *minden* $p(x) = \sum_{i=0}^{t} c_i x^i$ *polinomra.*

3.2. Számolások az 1. fejezethez

Megoldás 22 *a 6 példához:* (**??**) *-et megszorozzuk* x^n *-el és összegezzük* $n \geq 3$ *-ra*

$$S_n \cdot x^n = x \cdot S_{n-1} \cdot x^{n-1} + \sum_{t=0}^{n-3} S_t \cdot x^n + 2x^n,$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} S_n x^n = x \cdot \sum_{n=3}^{\infty} S_{n-1} \cdot x^{n-1} + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{t=0}^{n-3} S_t \cdot x^n + 2x^3 \cdot \sum_{n=3}^{\infty} x^{n-3} \ ,$$

$$F(x) - (S_0 x^0 + S_1 x^1 + S_2 x^2) =$$

$$= x \cdot [F(x) - (S_0 x^0 + S_1 x^1)] + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{t=0}^{n-3} S_t \cdot x^n + 2x^3 \cdot \tfrac{1}{1-x} \qquad (*)$$

Legyen $Z_t^n := S_t \cdot x^n$ *, és először számoljuk ki* $\sum_{n=3}^{\infty} \sum_{t=0}^{n-3} S_t \cdot x^n = \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{t=0}^{n-3} Z_t^n$ *értékét:*

$$\sum_{n=3}^{\infty} \sum_{t=0}^{n-3} Z_t^n =$$

$$\begin{aligned} = & \quad (Z_0^3) \\ + & \quad (Z_0^4 + Z_1^4) \\ + & \quad (Z_0^5 + Z_1^5 + Z_2^5) \\ + & \quad (Z_0^6 + Z_1^6 + Z_2^6 + Z_3^6) \\ + & \quad (Z_0^7 + Z_1^7 + Z_2^7 + Z_3^7 + Z_4^7) \end{aligned}$$

[4)] Ha $Q_u(x) = x \cdot Q'_{u-1}(x)$, akkor nyilván $\dfrac{Q_u(x)}{x} = Q'_{u-1}(x)$ és (56) következik.

$$+ \qquad (Z_0^8 + Z_1^8 + Z_2^8 + Z_3^8 + Z_4^8 + Z_5^8)$$
$$+ \ldots \; =$$

$$= (Z_0^3 + Z_1^4 + Z_2^5 + Z_3^6 + Z_4^7 + Z_5^8 + \ldots) + (Z_0^4 + Z_1^5 + Z_2^6 + Z_3^7 + Z_4^8 + \ldots) +$$
$$+ (Z_0^5 + Z_1^6 + Z_2^7 + Z_3^8 + \ldots) + (Z_0^6 + Z_1^7 + Z_2^8 + \ldots) + (Z_0^7 + Z_1^8 + \ldots) + \ldots \; =$$
$$= \sum_{n=3}^{\infty} \left(\sum_{t=0}^{\infty} Z_t^{n+t} \right) \; = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\sum_{t=0}^{\infty} x^n \cdot S_t \cdot x^t \right) = \sum_{n=3}^{\infty} \left(x^n \cdot \sum_{t=0}^{\infty} S_t \cdot x^t \right) =$$
$$= \sum_{n=3}^{\infty} x^n \cdot F(x) = F(x) \cdot \sum_{n=3}^{\infty} x^n = F(x) \cdot x^3 \cdot \frac{1}{1-x} \; ,$$

Tehát (*) értéke:

$$F(x) - (1 + 2x + 4x^2) = x \cdot [F(x) - 1 - 2x] + F(x) \cdot x^3 \cdot \tfrac{1}{1-x} + \tfrac{2x^3}{1-x} \; ,$$
$$F(x) = x \cdot F(x) + F(x) \cdot x^3 \cdot \tfrac{1}{1-x} + \tfrac{2x^3}{1-x} + (1 + 2x + 4x^2) - x(1 + 2x) \; ,$$
$$F(x) \cdot \left(1 - x - \tfrac{x^3}{1-x}\right) + \tfrac{2x^3}{1-x} + 2x^2 + x + 1$$

és végül:

$$F(x) = \frac{\frac{2x^3}{1-x} + 2x^2 + x + 1}{1 - x - \frac{x^3}{1-x}} = \frac{x^2 + 1}{-x^3 + x^2 - 2x + 1} \; . \tag{57}$$

□

Megoldás 23 *a 7 példához: (20) a következő alakban írható:*

$$S_n = (n-2) \cdot 2^{n-3} - \frac{1}{8} \sum_{t=0}^{n-3} 2^{n-t} \cdot S_t \; , \quad (3 \leq n) \; . \tag{58}$$

x^n -el megszorozva és összegezve $n \geq 3$ -ra kapjuk:

$$\sum_{n=3}^{\infty} S_n x^n = \sum_{n=3}^{\infty} \; (n-2) \cdot 2^{n-3} \cdot x^n - \frac{1}{8} \cdot \sum_{n=3}^{\infty} \; \left(\sum_{t=0}^{n-3} 2^{n-t} \cdot S_t \cdot x^n \right) =$$
$$= \sum_{n=3}^{\infty} \; (n-2) \cdot 2^{n-3} \cdot x^n - \frac{1}{8} \cdot \sum_{n=3}^{\infty} \; \left(\sum_{t=0}^{n-3} \; (2x)^{n-t} \cdot S_t \cdot x^t \right) \; , \qquad (**)$$

Az első összeg:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \; (n-2) \cdot 2^{n-3} \cdot x^n = x^3 \cdot \sum_{n=3}^{\infty} \; (n-2) \cdot 2^{n-3} \cdot x^{n-3} = x^3 \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} (2 \cdot x)^{n-2} \right) =$$

$$= \frac{x^3}{2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{1-2x}\right) = \frac{x^3}{2} \cdot \frac{2}{(2x-1)^2} = \frac{x^3}{(2x-1)^2} \ ,$$

a dupla összeghez, a 6 példa megoldásához hasonlóan legyen

$Z_t^n := (2x)^{n-t} \cdot S_t \cdot x^t \quad (0 \le t \le n-3,\ n \to \infty)$,

ekkor $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \sum\limits_{t=0}^{n-3} Z_t^n = \sum\limits_{n=3}^{\infty} \left(\sum\limits_{t=0}^{\infty} Z_t^{n+t} \right)$, $Z_t^{n+t} = (2x)^n \cdot S_t \cdot x^t$, *így*

$$\sum_{n=3}^{\infty} \sum_{t=0}^{n-3} Z_t^n = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\sum_{t=0}^{\infty} (2x)^n \cdot S_t \cdot x^t \right) = \left(\sum_{n=3}^{\infty} (2x)^n \right) \cdot \left(\sum_{t=0}^{\infty} S_t x^t \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{1-2x} - (2x)^0 - (2x)^1 - (2x)^2 \right) \cdot (F(x) - 0) = F(x) \cdot \frac{(2x)^3}{1-2x} \ ,$$

tehát (**) értéke

$$F(x) - 0 = \frac{x^3}{(2x-1)^2} - \frac{1}{8} \cdot F(x) \cdot \frac{(2x)^3}{1-2x} \ ,$$

$$F(x) = \frac{\frac{x^3}{(2x-1)^2}}{1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{(2x)^3}{1-2x}} = \frac{x^3}{-(2x-1)(x-1)(x+x^2-1)} = \frac{x^3}{-2x^4+x^3+4x^2-4x+1} \ .$$

□

Megoldás 24 *a 11 példához:* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot a_{n-1} = \frac{n+1}{n} \cdot a_{n-1}$, $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1+1}{1} \cdot 1 = 2$, *tehát* $a_n = n+1$.

Ekkor $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = x \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n =$

$$= x \cdot \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{1}{1-x} =$$

$$= \frac{x}{(x-1)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{x-(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x^2-2x+1} \ . \qquad \square$$

Megoldás 25 *a 13 példához: Az (34) egyenletet szorozzuk x^n -el és összegezzük $n \geq 1$ -re kapjuk:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 8x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n-1} x^{n-1} \ , \quad azaz \quad F(x) - a_0 = 8xF(x) + \frac{x}{1-10x}$$

így $\quad F(x) \cdot (1-8x) = 1 + \dfrac{x}{1-10x} \quad$ *és*

$$F(x) = \frac{1+\frac{x}{1-10x}}{(1-8x)} = \frac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)} = \frac{1-9x}{1-18x+80x^2} \ . \qquad \square$$

Hivatkozások

[J] **Johnsonbaugh, R.:** *Discrete Mathematics*, Pearson Education, Inc. 2018.

[R] **Rosen, K.H.:** *Discrete Mathematics and Its Applications*, McGraw-Hill, 1999-2007.

[Sz 1997] **Szalkai István:** *Diszkrét matematika feladatgyűjtemény*, Veszprémi Egyetemi Kiadó, 1997.

[Sz 2001] **Szalkai István:** *Diszkrét matematika és az algoritmuselmélet alapjai*, Veszprémi Egyetemi Kiadó, 2001.

[W] **Wilf,S.H:** *Generatingfunctionology,* Academic Press Inc., USA, 1990.

[$W-en$] https://en.wikipedia.org/wiki/Derangement