Magasabb- és végtelen dimenziós rekurziók

Szalkai István
Pannon Egyetem, Matematika Tanszék,
Veszprém
SZALKAI.ISTVAN@MIK.UNI-PANNON.HU

Abstract

Több sorozatot is magában foglaló rekurzív összefüggésekre adunk általános megoldási módszert.

Haladvány Kiadvány http://math.bme.hu/~hujter/halad.htm
2023.08.19. http://math.bme.hu/~hujter/230819.pdf

Bevezetés

Jelen cikkben $\mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$.

Definíció 1 ***(i)*** *Tetszőleges* $\mathcal{F} : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}$ *illetve* $\mathcal{G} : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$ *függvények és* $\overrightarrow{a} = (a_0, a_1, ...) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *sorozat esetén az*

$$a_n = \mathcal{F}(a_{n-1}, ..., a_{n-k}) \qquad (k \leq n) \tag{1}$$

illetve az

$$a_n = \mathcal{G}(a_{n-1}, ..., a_0) \qquad (1 \leq n) \tag{2}$$

egyenleteket (egyenletrendszereket) ***1-dimenziós*** k -adrendű *illetve* végtelen-rendű *rekurzív összefüggéseknek nevezzük.*

(ii) *Adott* $d_0, ..., d_k, ... \in \mathbb{C}$ *számok esetén az*

$$a_n = d_1 a_{n-1} + ... + d_k a_{n-k} \qquad (k \leq n) \tag{3}$$

illetve

$$a_n = d_1 a_{n-1} + ... + d_0 a_0 \qquad (1 \leq n) \tag{4}$$

egyenleteket (egyenletrendszereket) ***1-dimenziós*** *k -adrendű illetve végtelen-rendű* állandó együtthatójú lineáris homogén ***(ÁELH)*** *rekurzív összefüggéseknek nevezzük.* □

Az 1-dimenziós ÁELH rekurzív összefüggések megoldási módszere jól ismert (pl. [J], [R], [SzI 97], [SzI 01], ...).

Jelen cikkben *több* (véges vagy végtelen sok) *sorozatra* vonatkozó szimultán ÁELH összefüggésekre keresünk megoldási módszereket.

Az általunk bemutatandó lineáris algebrai módszernek csak a csíráját találtam meg [SG, Section 5.3] -ban, ahol csak a Fibonacci sorozatra használják. Mivel az 1-dimenziós ÁELH rekurzív összefüggésekre a klasszikus módszer (mértani sorozatokkal) sokkal egyszerűbb, mi a most ismertetett lineáris algebrai módszert csak magasabb dimenziós (több sorozat szimultán) rekurzív összefüggéseire tanácsoljuk. A módszert már ismertettem [SzI 05] cikkemben.

A módszert először bevezető példákon keresztül mutatjuk be. A számolások hosszúnak tűnhetnek, de nagyméretű mátrixokkal történő számításokat már több évtizede gépek is segítik.

Bemelegítés: 2 -dim 1 -rendű

Példa 2 *([SzI 97], [SzI 01, 5.19.Példa])* *Oldjuk meg az*

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = 9a_{n-1} + 7b_{n-1} \end{cases} \tag{5}$$

rekurziót az $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{C}$ *sorozatokra.*

Megoldás 3 *Legyen*

$$\mathbf{x}_n := \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{X} := \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

ekkor (5) ekvivalens az

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{X} \cdot \mathbf{x}_{n-1} \tag{7}$$

egyenlőséggel, aminek megoldása $\mathbf{x}_n = \mathbf{X}^n \cdot \mathbf{x}_0$ *ahol* $\mathbf{x}_0 := \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$ *a sorozat kezdő (nulladik) tagja, a k.é.p. .*

DE hogyan számoljuk ki egy $\mathbf{X}$ *négyzetes mátrix* hatványait?
Ez már közismert: Ha van $\mathbf{X}$ sajátvektoraiból álló bázis (SVB), akkor egyszerűen.

$\mathbf{X}$ karakterisztikus polinomja

$$\det(\mathbf{X} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}) = \lambda^2 - 6\lambda - 16 \ , \tag{8}$$

ennek gyökei $\mathbf{X}$ sajátértékei $\lambda_1 = -2$ és $\lambda_2 = 8$, vagyis $\mathbf{X}$ *hasonló* az

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \tag{9}$$

mátrixhoz, vagyis

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{T}^{-1} \tag{10}$$

valamilyen invertálható $\mathbf{T}$ mátrixra. Mivel $\mathbf{X}$ sajátvektorai, azaz az

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{u} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{u} \tag{11}$$

egyenletet kielégítő $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^2$ vektorok $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$, a diagonalizáló $\mathbf{T}$ mátrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \tag{12}$$

és így valóban $\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{T}^{-1}$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{13}$$

Ekkor pedig

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 8^n \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad , \tag{14}$$

vagyis (a beszorzások után) a (5) feladat végső megoldása

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{10}\left[8^n(a_0 + b_0) + (-2)^n(9a_0 - b_0)\right] \\ \qquad\qquad . \qquad\qquad . \\ b_n = \frac{1}{10}\left[8^n(9a_0 + 9b_0) + (-2)^n(-9a_0 + b_0)\right] \end{cases} \tag{15}$$

□

Általában, ha $\mathbf{X}$ hasonló egy diagonális $\mathbf{Y}$ mátrixhoz, vagyis $\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{T}^{-1}$ valamely invertálható $\mathbf{T}$ mátrixra, akkor nyilván $\mathbf{X}^n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}^n \cdot \mathbf{T}^{-1}$. Mátrixok diagonalizálhatósága pedig elsősorban a sajátértékvektor bázisok létezésétől függ.

Ha $\mathbf{X}$ nem hasonló egy diagonális mátrixhoz, akkor megpróbálhatjuk $\mathbf{X}$ Jordan-féle normálalakját felírni.

m -dim 1 -rendű

Az előző fejezetben bemutatott módszert általánosíthatjuk több sorozatra is:

Definíció 4 *Az* (a_n),(b_n),...,$(m_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *sorozatokra és* $\delta_{ij}, A_0, ..., M_0 \in \mathbb{C}$ *számokra az alábbi rekurziót*

$$\begin{cases} a_n = \delta_{11} a_{n-1} + \delta_{12} b_{n-1} + ... + \delta_{1m} m_{n-1} \\ b_n = \delta_{21} a_{n-1} + \delta_{22} b_{n-1} + ... + \delta_{2m} m_{n-1} \\ ... \\ m_n = \delta_{m1} a_{n-1} + \delta_{m2} b_{n-1} + ... + \delta_{mm} m_{n-1} \end{cases} (1 \leq n), \quad \begin{cases} a_0 = A_0 \\ b_0 = B_0 \\ ... \\ m_0 = M_0 \end{cases} \tag{16}$$

m -dimenziós 1 -rendű *ÁELH rekurzív összefüggésnek nevezzük.* □

Megjegyzés: Az m számú sorozatot mi (a_n),(b_n),...,(m_n) stb. betűkkel jelöltük. Precízen azt kellett volna írnunk, hogy $\left(a_n^{(1)}\right), \left(a_n^{(2)}\right), ..., \left(a_n^{(m)}\right) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sorozatok, $\delta_{ij}, A_0^{(1)}, ..., A_0^{(m)} \in \mathbb{C}$ számok és

$$a_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij} a_{n-1}^{(j)} \ , \quad 1 \leq i \leq m \ , \ 1 \leq n \tag{17}$$

és

$$a_0^{(i)} = A_0^{(i)} \ , \quad 1 \leq i \leq m \ . \tag{18}$$

De (16) talán kicsit olvashatóbb mint (17), és hasonlóan így fogjuk írni a többi m -dimenziós fejezetben is a képleteket.

Megoldás 5 *(16) megoldása az előző fejezethez hasonlóan a következő.*

Legyen $\mathbf{X} := [\delta_{ij}] \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\mathbf{x}_n := [a_n, b_n, ..., m_n]^T \in \mathbb{C}^m$, *ekkor (16) ekvivalens*

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{X} \cdot \mathbf{x}_{n-1} \tag{19}$$

-el, aminek megoldása

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{X}^n \cdot \mathbf{x}_0 \ . \tag{20}$$

Amennyiben $\mathbf{X}$ -nek létezik $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m\}$ sajátvektor bázisa a $\{\lambda_1, ..., \lambda_m\}$ sajátértékekkel, akkor $\mathbf{X}$ hasonló az $\mathbf{Y} = \mathbf{diag}\,[\lambda_1, ..., \lambda_m]$ diagonális mátrixhoz, vagyis $\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{T}^{-1}$, ahol $\mathbf{T} = [\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m]$, vagyis (16) megoldása:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}^n \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{diag}\,[\lambda_1^n, ..., \lambda_m^n] \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{x}_0 \tag{21}$$

□

A következő, 4 dimenziós 1 -rendű feladat részletes megoldását [SzI 05] -ban találhatjuk:

Példa 6 $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = b_n - c_n \\ c_{n+1} = c_n - d_n \\ d_{n+1} = d_n - a_n \end{cases} (0 \le n)\ , \quad \begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \\ c_0 = c \\ d_0 = d \end{cases} .$ □

2 -dim 2 -rendű

Definíció 7 *Adott* $\delta_i, \varepsilon_i \in \mathbb{C}$ *számok esetén az*

$$\begin{cases} a_n = \delta_1 a_{n-1} + \delta_2 a_{n-2} + \delta_3 b_{n-1} + \delta_4 b_{n-2} \\ b_n = \varepsilon_1 a_{n-1} + \varepsilon_2 a_{n-2} + \varepsilon_3 b_{n-1} + \varepsilon_4 b_{n-2} \end{cases} \tag{22}$$

összefüggést ***2 -dimenziós 2 -rendű*** *rekurziónak nevezzük.* □

Mivel a rekurzió 2-rendű, azaz a_{n-2} és b_{n-2} is szerepelnek az összefüggésben, ezért az első feladat az $\mathbf{X}$ mátrix és az $\mathbf{x}_n$ vektor megtalálása - egy kicsit gondolkozzon önállóan az Olvasó. A megfejtést a következő példa megoldásában adjuk meg.

Példa 8 *Tekintsük az*

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = 5a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3b_{n-1} + 4b_{n-2} \\ b_n = 7a_{n-1} + 8a_{n-2} + 9b_{n-1} + 6b_{n-2} \end{array} \right. (2 \leq n), \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = A_0 \ , \ a_1 = A_1 \\ b_0 = B_0 \ , \ b_1 = B_1 \end{array} \right. \tag{23}$$

rekurzív összefüggést.

Megoldás 9 *Legyen* $\mathbf{x}_n = [a_n, a_{n-1}, b_n, b_{n-1}]^T$ $(2 \leq n)$, $\mathbf{x}_1 = [A_1, A_0, B_1, B_0]^T$, *ekkor (23) ekvivalens az*

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_{n-1} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{x}_{n-1} \quad (2 \leq n) \tag{24}$$

egyenlettel, vagyis

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \tag{25}$$

és valóban $\mathbf{x}_n = \mathbf{X}^{n-1} \cdot \mathbf{x}_1 \quad (1 \leq n)$.

Vagyis általában az (22) rekurzióhoz javasolt mátrix és vektor:

$$\mathbf{X} := \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{x}_n := \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ b_n \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad . \tag{26}$$

Megjegyzés: Az $\mathbf{X}$ mátrix mérete (4×4) túl nagynak tűnhet a (23) rekurzió méretéhez (4×4) képest, hiszen az $\mathbf{x}_n = \mathbf{X} \cdot \mathbf{x}_{n-1}$ egyenlet második és negyedik sora csak az "$a_{n-1} = a_{n-1}$" és a "$b_{n-1} = b_{n-1}$", nulla információjú összefüggéseket kódolja. Még nagyobb lesz a redundancia a magasabb dimenziójú és rendű rekurziók esetén (ld. alább). Sajnos tömörebb megoldást most nem ismerünk.

A fő kérdés az, hogy $\mathbf{X}$ diagonalizálható-e.

$\mathbf{X}$ sajátértékei: $\lambda_1 = 6 + \sqrt{46}$, $\lambda_2 = 6 - \sqrt{46}$, $\lambda_3 = 1 + i$, $\lambda_4 = 1 - i$, sajátvektorai:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{40\sqrt{46}+270}{7\sqrt{46}+50} \\ \frac{3\sqrt{46}+22}{7\sqrt{46}+50} \\ \sqrt{46}+6 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \frac{40\sqrt{46}-270}{7\sqrt{46}-50} \\ \frac{3\sqrt{46}-22}{7\sqrt{46}-50} \\ 6-\sqrt{46} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1-i \\ -1 \\ 1+i \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} -1+i \\ -1 \\ 1-i \\ 1 \end{bmatrix},$$

tehát

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 6+\sqrt{46} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6-\sqrt{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{Y}^n = \begin{bmatrix} \left(6+\sqrt{46}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(6-\sqrt{46}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+i)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-i)^n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{40\sqrt{46}+270}{7\sqrt{46}+50} & \frac{40\sqrt{46}-270}{7\sqrt{46}-50} & -1-i & -1+i \\ \frac{3\sqrt{46}+22}{7\sqrt{46}+50} & \frac{3\sqrt{46}-22}{7\sqrt{46}-50} & -1 & -1 \\ 6+\sqrt{46} & 6-\sqrt{46} & 1+i & 1-i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 5.553\,1 & -0.512\,42 & -1.0-1.0i & -1.0+1.0i \\ 0.43443 & 0.655\,00 & -1.0 & -1.0 \\ 12.782 & -0.782\,33 & 1.0+1.0i & 1.0-1.0i \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2536\sqrt{46}+16\,445}{47\,012\sqrt{46}+335\,800} & \frac{1229\sqrt{46}+17\,986}{47\,012\sqrt{46}+335\,800} & \frac{2536\sqrt{46}+16\,445}{47\,012\sqrt{46}+335\,800} & \frac{1229\sqrt{46}+17\,986}{47\,012\sqrt{46}+335\,800} \\ -\frac{2214\sqrt{46}+14\,145}{47\,012\sqrt{46}+335\,800} & \frac{27\,429\sqrt{46}+186\,714}{47\,012\sqrt{46}+335\,800} & -\frac{2214\sqrt{46}+14\,145}{47\,012\sqrt{46}+335\,800} & \frac{27\,429\sqrt{46}+186\,714}{47\,012\sqrt{46}+335\,800} \\ -\frac{1}{292}+\frac{25}{73}i & -\frac{89}{292}-\frac{79}{292}i & -\frac{1}{292}-\frac{23}{146}i & \frac{57}{292}+\frac{67}{292}i \\ -\frac{1}{292}-\frac{25}{73}i & -\frac{89}{292}+\frac{79}{292}i & -\frac{1}{292}+\frac{23}{146}i & \frac{57}{292}-\frac{67}{292}i \end{bmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} 5.1394\times10^{-2} & 4.0207\times10^{-2} & 5.1394\times10^{-2} & 4.0207\times10^{-2} \\ -4.4544\times10^{-2} & 0.569\,38 & -4.4544\times10^{-2} & 0.569\,38 \\ -3.4247\times10^{-3}+0.3425i & -0.3048-0.2706i & -3.4247\times10^{-3}-0.1575i & 0.1952+0.2295i \\ -3.4247\times10^{-3}-0.3425i & -0.3048+0.2706i & -3.4247\times10^{-3}+0.1575i & 0.1952-0.2295i \end{bmatrix}$$

Ekkor $\mathbf{X} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{Y}\cdot\mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{X}^{n-1} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{Y}^{n-1}\cdot\mathbf{T}^{-1}$ és $\mathbf{x}_n = \mathbf{X}^{n-1}\cdot\mathbf{x}_1 \quad (1 \le n)$.

A konkrét számolásokat nem részletezzük, nagy méretük miatt, de ha bevezetjük a

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a & b & -1-i & -1+i \\ c & d & -1 & -1 \\ e & f & 1+i & 1-i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \varepsilon & \zeta & \eta & \vartheta \\ \iota & \kappa & \lambda & \mu \\ \nu & \xi & \pi & \rho \end{bmatrix} \text{ és az } \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_0 \\ B_1 \\ B_0 \end{bmatrix}$$

rövidítéseket, akkor

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ b_n \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{Y}^{n-1}\cdot\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}\cdot\mathbf{Y}^{n-1}\cdot\mathbf{T}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} A_1 \\ A_0 \\ B_1 \\ B_0 \end{bmatrix},$$

ahonnan:

$$a_n = a\left(\sqrt{46}+6\right)^{n-1}(\alpha A_1+\beta A_0+\gamma B_1+\delta B_0) - (1-i)\left((1-i)\right)^{n-1}(\pi B_1+\nu A_1+\xi A_0+\rho B_0) -$$

$$-(1+i)\left((1+i)\right)^{n-1}(\iota A_1+\kappa A_0+\lambda B_1+\mu B_0)+b\left(6-\sqrt{46}\right)^{n-1}(\varepsilon A_1+\eta B_1+\vartheta B_0+A_0\zeta),$$

$$a_{n-1} = c\left(\sqrt{46}+6\right)^{n-1}(\alpha A_1+\beta A_0+\gamma B_1+\delta B_0) - \left((1-i)\right)^{n-1}(\pi B_1+\nu A_1+\xi A_0+\rho B_0) -$$

$$-\left((1+i)\right)^{n-1}(\iota A_1+\kappa A_0+\lambda B_1+\mu B_0)+d\left(6-\sqrt{46}\right)^{n-1}(\varepsilon A_1+\eta B_1+\vartheta B_0+A_0\zeta),$$

$$b_n = (1+i)\left((1+i)\right)^{n-1}(\iota A_1+\kappa A_0+\lambda B_1+\mu B_0)+(1-i)\left((1-i)\right)^{n-1}(\pi B_1+\nu A_1+\xi A_0+\rho B_0) +$$

$$+e\left(\sqrt{46}+6\right)^{n-1}(\alpha A_1+\beta A_0+\gamma B_1+\delta B_0)+f\left(6-\sqrt{46}\right)^{n-1}(\varepsilon A_1+\eta B_1+\vartheta B_0+A_0\zeta),$$

$$b_{n-1} = \left(\sqrt{46}+6\right)^{n-1}(\alpha A_1+\beta A_0+\gamma B_1+\delta B_0)+\left((1+i)\right)^{n-1}(\iota A_1+\kappa A_0+\lambda B_1+\mu B_0) +$$

$$+\left(6-\sqrt{46}\right)^{n-1}(\varepsilon A_1+\eta B_1+\vartheta B_0+A_0\zeta)+\left((1-i)\right)^{n-1}(\pi B_1+\nu A_1+\xi A_0+\rho B_0).$$

Házi feladat: $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ rekurziója és hatványai. $\square$

m -dim k -rendű

Definíció 10 *Az* (a_n),(b_n),...,$(m_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *sorozatokra és* $\alpha_{ij}, ..., \mu_{ij}, A_i, ..., M_i \in \mathbb{C}$ *számokra az alábbi rekurziót*

$$\begin{cases} a_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{1i} a_{n-i} + \sum_{i=1}^{k} \beta_{1i} b_{n-i} + ... + \sum_{i=1}^{k} \mu_{1i} m_{n-i} \\ b_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{2i} a_{n-i} + \sum_{i=1}^{k} \beta_{2i} b_{n-i} + ... + \sum_{i=1}^{k} \mu_{2i} m_{n-i} \\ ... \\ m_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{mi} a_{n-i} + \sum_{i=1}^{k} \beta_{mi} b_{n-i} + ... + \sum_{i=1}^{k} \mu_{mi} m_{n-i} \end{cases} (k \leq n), \quad \begin{cases} a_i = A_i \\ bi = B_i \\ ... \\ m_i = M_i \end{cases} (i < k)$$

(27)

k -rendű m -dimenziós *ÁELH rekurzív összefüggésnek nevezzük.* □

Egy kis gondolkodás után az $\mathbf{x}_n \in \mathbb{C}^{km}$ vektor és az $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{km \times km}$ mátrix a következő lehet:

$$\mathbf{x}_n = [a_n, a_{n-1}, ..., a_{n-k+1}, b_n, b_{n-1}, ..., b_{n-k-1}, ..., m_n, m_{n-1}, ..., m_{n-k+1}]^T =$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & ... & \alpha_{1,k-1} & \alpha_{1,k} & \beta_{1,1} & ... & \beta_{1,k-1} & \beta_{1,k} & ... & \mu_{1,1} & ... & \mu_{1,k-1} & \mu_{1,k} \\ 1 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}1_{1} & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 \\ \alpha_{2,1} & ... & \alpha_{2,k-1} & \alpha_{2,k} & \beta_{2,1} & ... & \beta_{2,k-1} & \beta_{2,k} & ... & \mu_{2,1} & ... & \mu_{2,k-1} & \mu_{2,k} \\ 0 & ... & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & {}^{1}1_{1} & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{m,1} & ... & \alpha_{m,k-1} & \alpha_{m,k} & \beta_{m,1} & ... & \beta_{m,k-1} & \beta_{m,k} & ... & \mu_{m,1} & ... & \mu_{m,k-1} & \mu_{m,k} \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & {}^{1}1_{1} & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ ... \\ a_{n-k+1} \\ a_{n-k} \\ b_{n-1} \\ ... \\ b_{n-k+1} \\ b_{n-k} \\ ... \\ m_{n-1} \\ ... \\ m_{n-k+1} \\ m_{n-k} \end{bmatrix}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor valóban $\mathbf{x}_n = \mathbf{X} \cdot \mathbf{x}_{n-1}$ ekvivalens (27) -el.

∞ -dim 1 -rendű

Definíció 11 *Ha az* $\left(a_n^{(w)}\right) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *($n, w \in \mathbb{N}$) "kétdimenziós sorozat", és* $\mathcal{F} : \mathbb{C}^{u\times u} \to \mathbb{C}$ *függvény ($u = k^2 - 1$, $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$), akkor az*

$$a_n^{(w)} = \mathcal{F}\left(a_{n-j}^{(w-i)} : 0 \le i, j \le k,\ ij \neq 0\right) \ , \quad k \le n, w \tag{28}$$

egyenletrendszert ∞ ***-dim*** k ***-rendű*** *rekurzív összefüggésnek nevezzük.*

A rekurzió kezdeti értékeit $a_n^{(w)} := A_n^{(w)}$ *, $n, w < k$ alakban kell megadnunk.* □

$a_n^{(w)}$ helyett írhatunk a_n^w -et is (w most nem hatványkitevő).

Nagyon sok helyen használják a fenti, bonyolult összefüggéseket, például [MNPSz] -ben :

$$b_n^w = 2b_{n-1}^w + 2b_{n-1}^{w-1} - b_{n-2}^w - b_{n-2}^{w-1} + b_{n-3}^{w-1} - 2b_{n-3}^{w-2} \tag{29}$$

ha $3 \le n$ és $0 \le w \le n-1$, valamint $b_n^0 = 0$ ha $0 \le n \le w$, $b_1^0 = 1$, $b_2^0 = 2$, $b_2^1 = 1$, illetve

$$\begin{aligned} a_n^w &= a_{n-1}^w + z_{n-1}^w + b_{n-1}^{w-1} + c_{n-1}^{w-2} \\ b_n^w &= a_{n-1}^w + b_{n-1}^w + c_{n-1}^{w-1} \\ c_n^w &= a_{n-1}^w + b_{n-1}^w + c_{n-1}^w + d_{n-1}^w \\ d_n^w &= a_{n-1}^{w-1} + d_{n-1}^{w-1} \\ z_{n-1}^w &= z_{n-2}^{w-1} + c_{n-2}^{w-3} \end{aligned} \tag{30}$$

ha $2 \le n$, $0 \le w \le n$, valamint az összes kezdőérték 0 , kivéve $a_0^0 = 1$, $a_1^0 = b_1^0 = c_1^0 = 1$ és $d_1^1 = 1$.

Sajnos jelenleg csak az alábbi *nagyon speciális* ∞ -dim 1 -rendű ÁELH rekurziót tudjuk megoldani:

Példa 12 *Legyen* $(a_n^w) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *és tekintsük az*

$$a_n^w = \delta_1 a_{n-1}^w + \delta_2 a_{n-1}^{w-1} \quad (1 \le n, w) \tag{31}$$

ÁELH rekurzív összefüggést, $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{C}$ *(azaz* a_n^{w-1} *együtthatója* 0*), az*

$$a_n^0 = \varepsilon \cdot a_{n-1}^0 \quad (1 \le n) \ , \quad a_0^0 = A_0^0 \ , \tag{32}$$

$A_0^0 \in \mathbb{C}$ speciális *kezdeti értékekkel.*

Megoldás 13 *A mátrixot (tetszőleges)* rögzített $w = W$ *-re oldjuk meg. A (31) összefüggést felírjuk az összes* $1 \leq w \leq W$ *értékekre és hozzátesszük a (32) egyenletet:*

$$\begin{aligned} a_n^W &= \delta_1 a_{n-1}^W + \delta_2 a_{n-1}^{W-1} \\ a_n^{W-1} &= \delta_1 a_{n-1}^{W-1} + \delta_2 a_{n-1}^{W-2} \\ &\ldots \\ a_n^w &= \delta_1 a_{n-1}^w + \delta_2 a_{n-1}^{w-1} \\ &\ldots \\ a_n^1 &= \delta_1 a_{n-1}^1 + \delta_2 a_{n-1}^0 \\ a_n^0 &= \varepsilon \cdot a_{n-1}^0 \end{aligned} \tag{33}$$

ami alapján $\mathbf{x}_n^W := \left[a_n^W, ..., a_n^0\right]^T \in \mathbb{C}^{W+1}$ *és*

$$\mathbf{X} := \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \delta_1 & \delta_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \delta_1 & \delta_2 \\ 0 & 0 & ... & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(W+1)\times(W+1)}$$

választással

$$\mathbf{x}_n^W = \mathbf{X} \cdot \mathbf{x}_{n-1}^W \quad (1 \leq n) \tag{34}$$

ekvivalens (33) -al.

Mivel $\mathbf{X}$ speciális felső háromszög mátrix, ezért *hatványai* aránylag könnyen kiszámolhatóak.

Hivatkozások

[J] **Johnsonbaugh, R.:** *Discrete Mathematics*, Pearson Education, Inc. 2018.

[MNPSz] **Major László, Németh László, Anna Pahikkala Anna, Szalay László:** *Self-avoiding walks of specified lengths on rectangular grid graphs*, Graphs and Combinatorics manuscript, benyújtva.

[R] **Rosen, K.H.:** *Discrete Mathematics and Its Applications*, McGraw-Hill, 1999-2007.

[SG] **Strang, G.:** *Linear Algebra and its Applications*, Academic Press, https://www.academia.edu/36926979/Strang_Linear_Algebra_and_Its_Applications_4ed_pdf

[SzI 97] **Szalkai István:** *Diszkrét matematika feladatgyűjtemény*, Egyetemi jegyzet, Veszprémi Egyetemi Kiadó, 1997.

[SzI 01] **Szalkai István:** *Diszkrét matematika és az algoritmuselmélet alapjai*, Egyetemi jegyzet, Veszprémi Egyetemi Kiadó, 2001.

[SzI 05] **Szalkai István:** *A Short Remark on Difference Equations*, The Mathematical Gazette, vol. 89. No.516, 2005 (Nov), Note 89.66, pp. 467-468.