Nemnégyzetes mátrixok inverzei

Szalkai István
Pannon Egyetem, Matematika Tanszék,
Veszprém
SZALKAI.ISTVAN@MIK.UNI-PANNON.HU

Abstract

Nem négyzetes mátrixok inverzeit szemléltetjük elemi módon, lineáris algebra nélkül.

Haladvány Kiadvány http://math.bme.hu/~hujter/halad.htm
2023.08.21. http://math.bme.hu/~hujter/230821.pdf

Bevezetés

Elemi lineáris algebrai órákon, tankönyvekben gyakran megpendítik a *nem négyzetes* mátrixok inverzét is, néha még feladatokat is kitűznek (sőt, már ilyen zh-példát is láttam). Azonban csak a legjobb lineáris algebrai könyvekben (mint például [KB]) bizonyítják be szabatosan, hogy mikor van és mikor nincs (és miért). A bizonyítás nem nehéz, de támaszkodik a lineáris kombinációk és a bázis fogalmára. Ezt a rövid érvelést (a "poén lelövését") a legutolsó fejezetben ismertetjük.

Jelen írásunkban a jelenségeket elsősorban szemléltetni akarjuk, csak a mátrixok szorzásának fogalma és minimális középiskolai ismeretek felhasználásával. *Több* megoldási módszert is bemutatunk.

Elsősorban *nem négyzetes* mátrixok inverzeivel foglalkozunk, mert a négyzetes mátrixok inverzeit kimerítően tárgyalja a legtöbb lineáris algebrai előadás és tankönyv, és tulajdonságaik nagyon sok tekintetben eltérnek a nem négyzetes mátrixok inverzeitől. (Lásd még [Sz 18].)

Az alábbiakban csak a "tetszőleges" mátrixok lehetnek négyzetesek.

Definíció 1 ***(o)*** *Tetszőleges A mátrixra az $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ jelölés azt rövidíti, hogy A -nak m sora és n oszlopa van.*

(i) *Tetszőleges $\ell \in \mathbb{N}$ esetén az ℓ -dimenziós* ***egységmátrix*** *$E_\ell \in \mathbb{R}^{\ell\times\ell}$ amelynek főátlójában 1, azon kívül 0 számok állnak.*

(ii) *Egy tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix* ***balinverze*** *$Y \in \mathbb{R}^{n\times m}$ és* ***jobbinverze*** *$X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ha $YA = E_n$ és $AX = E_m$.* □

Egy *nem négyzetes* mátrix bal- és jobbinverzei egymástól függetlenül létezhetnek vagy nem léteznek (lásd a következő fejezetekben), és mivel már a méreteik sem egyeznek meg, tehát mindig $X \neq Y$.

Azonban a négyzetes mátrixok a szorzásra nézve *félcsoportot* alkotnak, tehát minden négyzetes mátrixnak a bal- és jobbinverzei mindig megegyeznek. (Lásd még [Sz 19].)

Definíció 2 *Az $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix* ***fekvő****, ha $m < n$, azaz kevesebb sora van mint oszlopa, és* ***álló****, ha $m > n$, azaz kevesebb oszlopa van mint sora.* □

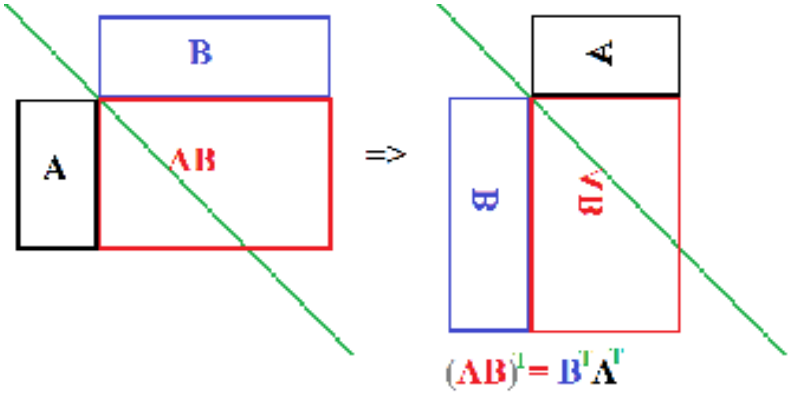
Fekvő mátrix transzponáltja[1)] nyilván álló, és fordítva, és egységmátrix transzponáltja önmaga.

A következő összefüggés és következménye nagyon hasznos lesz vizsgálatainkban:

Tétel 3 $(AB)^T = B^T A^T$

Bizonyítás: Vegyünk elő egy papírlapot, és az alábbi ábrát tükrözzük a zöld egyenes mentén. □

[1)] M^T az M mátrix *transzponáltját*, azaz a főátlójára tükrözöttjét jelöli.



1. ábra: $(AB)^T = B^T A^T$ *szemléltetése*

Következmény 4 *A -nak pontosan akkor van X balinverze, ha A^T -nak van Y jobbinverze, és ekkor $X = Y^T$.*

A -nak pontosan akkor van Y jobbinverze, ha A^T -nak van X balinverze, és ekkor $X = Y^T$. □

Tehát elegendő lenne vagy csak jobb vagy csak bal oldali inverzekkel (vagy csak álló vagy csak fekvő mátrixokkal) foglalkoznunk. Elsősorban *jobboldali inverzeket* keresünk, de általában azt (is) tekintjük, amelyik érdekesebb, vagy egyszerűbb.

Álló mátrixok

$m \times 1$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ ... \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x & y & ... \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... \\ 0 & 1 & ... \\ ... & ... & ... \end{bmatrix} \text{ csak úgy lehet, ha } \begin{cases} ax = 1 & bx = 0 \\ ay = 0 , & by = 1 \end{cases} ,$$

ami lehetetlen, mert $ax = 1$ és $by = 1$ miatt a betűk egyike sem 0, de ekkor $ay \neq 0$ és $bx \neq 0$.

$m \times 2$

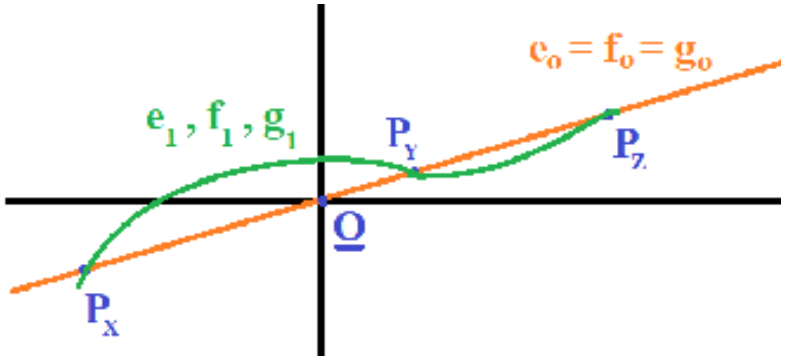
Első megközelítés:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \\ ... & ... \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & ... \\ x_2 & y_2 & z_2 & ... \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 1 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 1 & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{bmatrix} \text{ azt jelenti, hogy}$$

$$\begin{cases} e_1 : a_1x_1 + a_2x_2 = 1, & e_0 : a_1y_1 + a_2y_2 = 0, & e_0 : a_1z_1 + a_2z_2 = 0 \\ f_0 : b_1x_1 + b_2x_2 = 0, & f_1 : b_1y_1 + b_2y_2 = 1, & f_0 : b_1z_1 + b_2z_2 = 0 \\ g_0 : c_1x_1 + c_2x_2 = 0, & g_0 : c_1y_1 + c_2y_2 = 0, & g_1 : c_1z_1 + c_2z_2 = 1 \end{cases} , \qquad (1)$$

vagyis az e_0 egyenes átmegy az origón és a $P_Y\,(y_1, y_2)$, $P_Z\,(z_1, z_2)$ pontokon, az f_0 egyenes átmegy az origón és a $P_X\,(x_1, x_2)$, $P_Z\,(z_1, z_2)$ pontokon, és a g_0 egyenes átmegy az origón és a $P_X\,(x_1, x_2)$, $P_Y\,(y_1, y_2)$ pontokon, tehát az origó és a P_X , P_Y és P_Z pontok egy egyenesbe esnek. A P_X , P_Y és P_Z pontok egyike sem lehet origó, mert az e_1 , f_1 és g_1 egyenesek egyike sem megy át az origón de a P_X , P_Y és P_Z pontokon igen. De ha egy egyenes átrmegy a P_X , P_Y és P_Z pontok mindegyikén, akkor az előzőek szerint az origón is át kellene haladnia, ellentmondás.

(Mellesleg $e_1 \parallel e_0$, $f_1 \parallel f_0$ és $g_1 \parallel g_0$.)



2. ábra: Az e_0, f_0, g_0, e_1, f_1 és g_1 egyenesek

Második megközelítés:

Az (1) egyenletrendszer vektorok skaláris szorzatával a következő alakban írható:

$$\begin{cases} e_1 : \mathbf{ax} = 1, & e_0^y : \mathbf{ay} = 0, & e_0^z : \mathbf{az} = 0 \\ f_0^x : \mathbf{bx} = 0, & f_1 : \mathbf{by} = 1, & f_0^z : \mathbf{bz} = 0 \\ g_0^x : \mathbf{cx} = 0, & g_0^y : \mathbf{cy} = 0, & g_1 : \mathbf{cz} = 1 \end{cases}, \tag{2}$$

ahol $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ adott és $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ keresendő síkbeli vektorok.

Az e_0^* egyenletek szerint $\mathbf{a} \perp \mathbf{y}, \mathbf{z}$, vagyis $\mathbf{y} \parallel \mathbf{z}$. Hasonlóan, f_0^* szerint $\mathbf{x} \parallel \mathbf{z}$, vagyis az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ vektorok párhuzamosak. De mivel e_0^* , g_0^* , f_0^* szerint $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \perp \mathbf{x} \parallel \mathbf{y} \parallel \mathbf{z}$, de ekkor az e_1 , f_1 , g_1 egyenletek ("$\mathbf{a} \not\perp \mathbf{x}$",...) nem teljesülhetnek. □

$m \times 3$

Első megközelítés:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & u_1 & \dots \\ x_2 & y_2 & z_2 & u_2 & \dots \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \tag{3}$$

Most 4 pontot és 8 síkot kell megvizsgálnunk a 3 -dimenziós (χ_1, χ_2, χ_3) koordinátarendszerben:

$$P_X\,(x_1, x_2, x_3), \quad P_Y\,(y_1, y_2, y_3), \quad P_Z\,(z_1, z_2, z_3), \quad P_U\,(u_1, u_2, u_3)\ ,$$

$$S_1^a : a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + a_3\chi_3 = 1, \quad S_0^a : a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + a_3\chi_3 = 0\ ,$$
$$S_1^b : b_1\chi_1 + b_2\chi_2 + b_3\chi_3 = 1, \quad S_0^b : b_1\chi_1 + b_2\chi_2 + b_3\chi_3 = 0\ ,$$
$$S_1^c : c_1\chi_1 + c_2\chi_2 + c_3\chi_3 = 1, \quad S_0^c : c_1\chi_1 + c_2\chi_2 + c_3\chi_3 = 0\ ,$$
$$S_1^d : d_1\chi_1 + d_2\chi_2 + d_3\chi_3 = 1, \quad S_0^d : d_1\chi_1 + d_2\chi_2 + d_3\chi_3 = 0\ .$$

Az S_0^* síkok áthaladnak az origón és a P_X , P_Y , P_Z , P_U pontok közül három-három ponton, vagyis ez a négy pont és az origó egy síkban vannak. Azonban az S_1^* síkok nem haladnak át az origón de a P_X , P_Y , P_Z , P_U pontok közül legalább három ponton, ellentmondás.

Második megközelítés:

Az $m \times 2$ esethez hasonlóan, az (3) mátrixegyenlet (a P pontok illeszkednek az S síkokra) egyenletrendszer formájában, vektorok skaláris szorzatával a következő alakban írható:

$$\left\{\begin{array}{cccc} S_1^{ax} : \mathbf{ax} = 1, & S_0^{ay} : \mathbf{ay} = 0, & S_0^{az} : \mathbf{az} = 0, & S_0^{au} : \mathbf{au} = 0 \\ S_0^{bx} : \mathbf{bx} = 0, & S_1^{by} : \mathbf{by} = 1, & S_0^{bz} : \mathbf{bz} = 0, & S_0^{bu} : \mathbf{bu} = 0 \\ S_0^{cx} : \mathbf{cx} = 0, & S_0^{cy} : \mathbf{cy} = 0, & S_1^{cz} : \mathbf{cz} = 1, & S_0^{cu} : \mathbf{cu} = 0 \\ S_0^{dx} : \mathbf{dx} = 0, & S_0^{dy} : \mathbf{dy} = 0, & S_0^{dz} : \mathbf{dz} = 0, & S_1^{du} : \mathbf{du} = 1 \end{array}\right. , \qquad (4)$$

ahol $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$ adott és $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ keresendő térbeli vektorok.

Az S_0^{bx} , S_0^{bx} , S_0^{bx} egyenletek szerint $\mathbf{x} \perp \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ de $\mathbf{x} \not\perp \mathbf{a}$, vagyis a $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ vektorok egy síkban (az $\mathbf{x}$ -re merőleges síkban) vannak, míg az $\mathbf{a}$ vektor nincs ebben a síkban - feltéve, hogy az $\mathbf{x}$ vektor létezik. Azonban az S_0^{ay} , S_0^{cy} , S_0^{dy} egyenletek szerint $\mathbf{y} \perp \mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$, vagyis az $\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ vektorok egy síkban vannak, vagyis mind a négy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ vektor egy síkban van, ami ellentmondás. $\square$

$m \times n$ **,** $4 \leq n$

Első megközelítés:

Most $\mathbb{R}^n$ -ben $n+1$ pontot és az origót, valamint $2 \cdot (n+1)$ db $n-1$ -dimenziós hipersíkot kell vizsgálnunk. Az ellentmondás ugyanúgy adódik, mint az előző ($n \leq 3$) esetekben.

Második megközelítés:

Most $\mathbb{R}^n$ -ben az adott $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ és $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ keresendő vektorokat kell merőlegesség szerint vizsgálnunk, az (4) egyenletrendszerhez hasonlóan. Egy vektorra merőleges ortogonális kiegészítő alterek vizsgálatával juthatunk ellentmondásra.

Végkövetkeztetés

Álló mátrixoknak sohasincs jobbinverze. (*Ekvivalens*: fekvő mátrixoknak sohasincs balinverze.)

Fekvő mátrixok

$1 \times n$

$$\begin{bmatrix} a & b & ... \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ ... \end{bmatrix} = [1] \text{ azt jelenti, hogy } ax + by + ... = 1 \ ,$$

aminek csak akkor *nincs* megoldása, ha $a = b = ... = 0$.

$2 \times n$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ... \\ b_1 & b_2 & b_3 & ... \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ ... & ... \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ azt jelenti, hogy}$$

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... = 1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + ... = 0 \end{cases} \tag{5}$$

és

$$\begin{cases} a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + ... = 0 \\ b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 + ... = 1 \end{cases} . \tag{6}$$

Ha az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, ...)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, ...)$ vektorok *párhuzamosak* (vagyis $a_i = \kappa b_i$ és $b_i = \lambda a_i$ minden $i \leq n$ esetén), akkor $\mathbf{bx} = 0$ -ből $\mathbf{ax} = 0 \neq 1$ következik, és $\mathbf{ay} = 0$ -ből $\mathbf{by} = 0 \neq 1$, vagyis az $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ... \\ b_1 & b_2 & b_3 & ... \end{bmatrix}$ mátrixnak *nincs* jobboldali inverze.

Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ *nem* párhuzamosak, akkor találhatunk két olyan i, j indexet, amelyekre $\frac{a_i}{b_i} \neq \frac{a_j}{b_j}$, tegyük fel, hogy $i = 1$ és $j = 2$. Ekkor *bármilyen rögzített* $x_3, ...$ és c, d számok esetén az

$$e_a : a_1x_1 + a_2x_2 = c - a_3x_3 - ... \tag{7}$$

és

$$e_a : b_1x_1 + b_2x_2 = d - b_3x_3 - ... \tag{8}$$

egyenesek nem párhuzamosak. Ebből pedig az következik, hogy c és d *akármilyen* választása esetén az egyeneseknek van metszéspontjuk, ráadásul *bármely* $x_3 \in \mathbb{R}$ szám esetén. Ez pedig azt jelenti, hogy a (5) és (6) egyenletrendszereknek *végtelen sok*[2)] van megoldása.

Kaptuk tehát:

Tétel 5 *A $2 \times n$ méretű fekvő mátrixoknak pontosan akkor* nincs *jobboldali inverze, ha sorvektorai párhuzamosak. Ha nem párhuzamosak, akkor végtelen sok jobboldali inverz van.* □

$3 \times n$

$$\text{Legyen } \mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & ... \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & ... \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & ... \end{bmatrix}.$$

A jobbinverz

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & ... \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & ... \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & ... \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ ... & ... & ... \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

azt jelenti, hogy

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + ... = 1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + ... = 0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + ... = 0 \end{cases}, \tag{9}$$

$$\begin{cases} a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + a_4y_4 + ... = 0 \\ b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 + b_4y_4 + ... = 1 \\ c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + c_4y_4 + ... = 0 \end{cases} \tag{10}$$

[2)] kontinuum számosságú

és

$$\begin{cases} a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 + a_4z_4 + ... = 0 \\ b_1z_1 + b_2z_2 + b_3z_3 + b_4z_4 + ... = 0 \\ c_1z_1 + c_2z_2 + c_3z_3 + c_4z_4 + ... = 1 \end{cases} . \tag{11}$$

Ha az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, ...)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, ...)$ és és $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, ...)$ vektorok bármelyike előáll a másik kettőből számmal szorzással és összeadással[3)], például $\mathbf{c} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}$, akkor a (11) egyenletrendszer első egyenletét megszorozva λ_1 -el, a másodikat λ_2 -vel és összeadva, a harmadik egyenlet eredménye mindenképpen 0, bármely $(z_1, z_2, z_3, ...)$ megoldás esetén.

Tehát ez esetben az $\mathbf{A}$ mátrixnak *nincs* jobboldali inverze.

Ha nem a fenti eset teljesül, akkor vannak olyan i, j, k indexek, amelyekkel az $\mathbf{a}^{ijk-} = (a_i, a_j, a_k)$, $b^{ijk-} = (b_i, b_j, b_k)$ és $c^{ijk-} = (c_i, c_j, c_k)$ vektorok egyike sem áll elő a másik kettőből. Ezt most be kell bizonyítanunk.

Segédtétel 6 *Az* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ *legalább* 3 *-dimenziós vektorok egyike sem állítható elő a másik kettő lineáris kombinációjaként pontosan akkor, ha léteznek olyan* i, j, k *indexek, amelyekkel az* $\mathbf{a}^{ijk-} = (a_i, a_j, a_k)$, $b^{ijk-} = (b_i, b_j, b_k)$ *és* $c^{ijk-} = (c_i, c_j, c_k)$ *vektorok egyike sem áll elő a másik kettőből.*

Bizonyítás: Például tekintsük a $\mathbf{c}$ vektor előállíthatóságának kérdését az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokból: van-e az

$$\begin{cases} e_1 : a_1x + b_1y = c_1 \\ \qquad ... \\ e_n : a_nx + b_ny = c_n \end{cases} \tag{12}$$

egyenletrendszernek (x, y) gyöke $(3 \leq n)$? Ez pontosan azt jelentené, hogy az $e_1, ..., e_n$ egyeneseknek van egy közös metszéspontjuk az (x, y) síkon.

A Segédállítás azt állítja, hogy az $e_1, ..., e_n$ egyeneseknek pontosan akkor van egy metszéspontja, ha közülük *bármely* háromnak van metszéspontja.

Ez a geometriai tétel vagy jól ismert, vagy alább belátjuk. Az $n = 3$ állítás tiriviális, tehát tegyük fel, hogy $4 \leq n$.

Ha az összesnek van akkor nyilván bármely háromnak is van.

Tegyük fel, hogy bármely három egyenesnek van metszéspontja. Nyilván ekkor $e_i \parallel e_j$ csak úgy lehet ha $e_i = e_j$ (egybeesnek).

[3)] azaz úgynevezett *lineáris kombiációval*

Ha $e_1 \nparallel e_2$, akkor $e_1 \cap e_2$ egyetlen pontból áll, és a feltevés szerint minden további egyenes köteles ezen a metszésponton áthaladni.

Ha $e_1 \parallel e_2$, akkor $e_1 = e_2$.

Ha az összes további egyenes párhuzamos e_1 -gyel, akkor kész.

Ha csak egyetlen további egyenes nem párhuzamos e_1 -gyel, akkor is kész.

Tehát ($4 \leq n$ miatt) van *legalább kettő* egyenes, akik *nem párhuzamosak* e_1 -gyel. Az ilyen egyeneseknek tekintsük az e_1 -gyel való metszéspontjait. (Minden, $e_1 = e_2$ -vel nem párhuzamos egyenesnek van metszéspontja e_1 -gyel a feltevés szerint.) Ha kettő ilyen egyenesnek, mondjuk e_{i0} és e_{j0} -nak e_1 -gyel való metszéspontja *különböző*, akkor az e_1 , e_{i0} , e_{j0} egyeneseknek nincs metszéspontja, ellentmond a feltevésnek. Tehát az összes, e_1 -gyel nem párhuzamos egyenesnek az e_1 -gyel való metszéspontja *azonos*, ami bizonyítja állításunkat. □

Folytatjuk az $\mathbf{A}$ mátrix inverzének keresését.

Ez esetben az $\mathbf{a}^{ijk-}$, $\mathbf{b}^{ijk-}$, $\mathbf{b}^{ijk-}$ térbeli vektorok nem eshetnek egy síkba.

Feltehetjük, hogy $i = 1$, $j = 2$ és $k = 3$. Tekintsük a térbeli (χ_1, χ_2, χ_3) koordinátarendszerben az alábbi síkokat:

$$S_a : a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + a_3\chi_3 = d_a - a_4x_4 - ... \quad , \tag{13}$$

$$S_b : b_1\chi_1 + b_2\chi_2 + b_3\chi_3 = d_b - b_4x_4 - ... \quad , \tag{14}$$

és

$$S_c : c_1\chi_1 + c_2\chi_2 + c_3\chi_3 = d_c - c_4x_4 - ... \quad , \tag{15}$$

ahol d_a, d_b, d_c, $x_4, ... \in \mathbb{R}$ tetszőleges számok.

A síkok normálvektorai rendre $\mathbf{n}_a = \mathbf{a}^{123-} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{n}_b = b^{123-} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\mathbf{n}_c = c^{123-} = (c_1, c_2, c_3)$. A d_a, d_b, d_c, $x_4, ...$ számok változtatásával a síkok önmagukkal párhuzamosan mozdulnak el. Mivel az $\mathbf{n}_a$, $\mathbf{n}_b$, $\mathbf{n}_c$ normálvektorok nem esnek egy síkba, *soha* nem fordulhat elő, hogy az $e_{ab} = S_a \cap S_b$, $e_{ac} = S_a \cap S_c$ és $e_{bc} = S_b \cap S_c$ egyenesek (síkok) metszete üres halmaz lenne.

Ez pedig azt jelenti, hogy *bármilyen* d_a, d_b, d_c számokra az (9), (10) és (11) egyenletrendszereknek mindig van megoldása, *mindegyik* $x_4, ... \in \mathbb{R}$ szám(ok) esetén.

Vagyis ebben az esetben végtelen sok jobbinverze van az $\mathbf{A}$ mátrixnak.

Tehát az alábbi tételt bizonyítottuk be:

Tétel 7 *A* $3 \times n$ *méretű fekvő mátrixoknak pontosan akkor* van *jobboldali inverze, ha sorvektorai közül egyik sem állítható elő a másik kettő lineáris kombinációjával. Ez esetben* végtelen *sok inverz van.* □

$m \times n$, $4 \leq m$

A jobbinverz keresését ismét lineáris egyenletrendszerek nyelvére fordítjuk le:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & ... \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & ... \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & ... \\ x_2 & y_2 & z_2 & ... \\ x_3 & y_3 & z_3 & ... \\ x_4 & y_4 & z_4 & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 1 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 1 & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{bmatrix} \tag{16}$$

azt jelenti, hogy

$$\begin{cases} a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + a_4\omega_4 + ... = 1 \mid 0 \mid 0 \mid ... \mid 0 \\ b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_3\omega_3 + b_4\omega_4 + ... = 0 \mid 1 \mid 0 \mid ... \mid 0 \\ c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_3 + c_4\omega_4 + ... = 0 \mid 0 \mid 1 \mid ... \mid 0 \\ ... \\ r_1\omega_1 + r_2\omega_2 + r_3\omega_3 + r_4\omega_4 + ... = 0 \mid 0 \mid 0 \mid ... \mid 1 \end{cases} , \tag{17}$$

ahol az ω_j ismeretlenek helyére rendre az x_j , y_j , ... , w_j ismeretleneket kell helyettesítenünk, miközben az = jeltől jobbra levő oszlopokból (| jellel elválasztva) rendre az elsőt, másodikat, ... , utolsót kell tekintenünk.

Vagyis n -szer kell megoldanunk n ismeretlenes, m egyenletből álló rendszereket. Az egyenletrendszerek baloldalai megegyeznek (az együtthatók A elemei), csak a jobboldali számok változnak.

HA A valamelyik, mondjuk i_0 -dik *sora* előáll a többi sor lineáris kombinációjaként, akkor valamelyik egyenletrendszernek nincs megoldása, vagyis A -nak nincs jobbinverze. Tekintsük ugyanis azt az egyenletrendszert (a | jelekkel elválasztott oszlopok közül azt), amelyikben éppen az i_0 -dik sorban van 1, a többiben pedig 0. Most a többi sornak a megfelelő lineáris kombinációját véve éppen az i_0 -dik sort kapjuk, azonban az = jeltől jobbra álló 0 -ák bármely lineáris kombinációja 0 és nem 1. Ez az ellentmondás mutatja, hogy ebben az esetben A -nak *nincs* jobbinverze.

HA pedig ilyen sor nincs, akkor végezzük el a *Gauss-eliminációt*. Mivel az egyenletrendszerek baloldalai megegyeznek, ezért az n db $m \times n$ méretű egyenletrendszert kezelhetjük egyetlen $m \times (n + m)$ méretű táblázatban. A feltétel szerint az elimináció során az egyenlőségjelektől balra egyetlen sor sem válhat csupa 0 -vá, ami meggátolhatná az egyenletrendszer megoldhatóságát. Tehát az egyenletrendszerek mindegyikének van megoldása. Mivel több oszlop van mint sor, az elimináció szerint végtelen sok megoldás létezik. Vagyis ez eseben az A mátrixnak végtelen sok jobbinverze létezik! □

Végkövetkeztetés

Fekvő mátrixoknak *pontosan akkor* van jobbinverze, ha egyik sora sem állítható elő a többiek lineáris kombinációjaként (azaz sorvektorai lineárisan függetlenek), ekkor azonban végtelen sok jobbinverz létezik.

(*Ekvivalens*: álló mátrixoknak *pontosan akkor* van balinverze, ha egyik oszlopa sem állítható elő a többiek lineáris kombinációjaként [azaz oszlopvektorai lineárisan függetlenek], ekkor azonban végtelen sok balinverz létezik.)

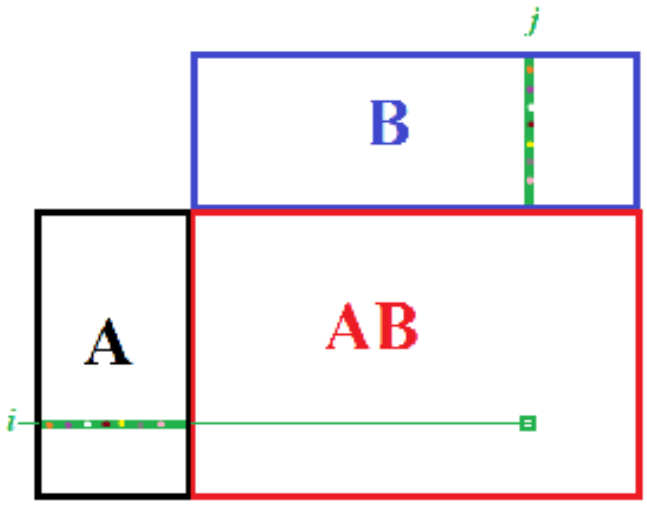
Lineáris algebra - csattanó

Mint ígértük, most adjuk meg a rövid, végső választ. Rövid, mert feltételezi a generátorrendszer és a bázis fogalmának és tulajdonságainak ismeretét.

A téma jobb megértése céljából javasoljuk a *mátrix-mátrix* és *mátrix-vektor* szorzások szemléletes felelevenítését.

Mint tudjuk, az $\mathbf{AB}$ mátrix (i,j) -edik eleme = $\mathbf{A}$ -nak i -edik sorának és $\mathbf{B}$ -nek j -edik oszlopának skaláris szorzata, azaz

$$[\mathbf{AB}]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [\mathbf{A}]_{i,k} \cdot [\mathbf{B}]_{k,j} \quad . \tag{18}$$



3. ábra: $[\mathbf{AB}]_{i,j}$ *szemléltetése*

Kicsit átgondolva ezt az összefüggést beláthatjuk a következő hasznos összefüggést:

Tétel 8 *Legyenek az* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *mátrix* oszlopvektorai $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ *és legyen* $\mathbf{x} = [x_1, ..., x_n] \in \mathbb{R}^n$ *tetszőleges oszlopvektor.*

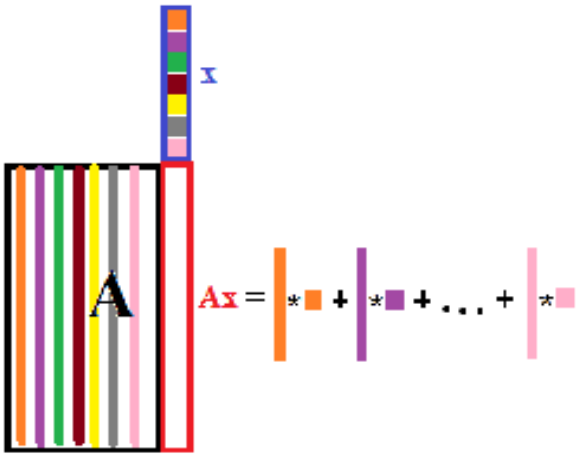
(i) *Ekkor*

$$\mathbf{Ax} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}_k \cdot x_k \quad , \tag{19}$$

vagyis: ***"Egy mátrixot jobbról szorozva egy*** x ***oszlopvektorral = a mátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációja, ahol az együtthatók az*** x ***vektor komponensei."*** *(Lásd 4. ábra.)*

Hasonlóan beláthatjuk:

(ii) ***"Egy mátrixot balról szorozva egy*** y ***sorvektorral = a mátrix sorvektorainak lineáris kombinációja, ahol az együtthatók az*** y ***vektor komponensei."*** □



4. ábra: $\mathbf{x}$ *szemléltetése*

A tétel alapján érdemes az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és az $\mathbf{AB}$ mátrixokat oszlop- VAGY sorvektorokra felbontani ("szétfűrészelni"), és ekkor a következőket kapjuk:

Következmény 9 ***(i)*** *Az* $\mathbf{AB}$ *mátrix j -edik oszlopa egyenlő az* $\mathbf{A}$ *mátrix (összes) oszlopvektorának lináris kombinációja, ahol az együtthatók a* $\mathbf{B}$ *mátrix j -edik oszlopának elemei.*

(ii) *Az* $\mathbf{AB}$ *mátrix i -edik sora egyenlő a* $\mathbf{B}$ *mátrix (összes) sorvektorának lináris kombinációja, ahol az együtthatók az* $\mathbf{A}$ *mátrix i -edik sorának elemei.* □

A következmény alapján már könnyedén meg tudjuk válaszolni tetszőleges mátrixok jobb- és baloldali inverzeinek *létezését.*

Mindössze azt kell még felidéznünk, hogy az $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ egyenletben ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *tetszőleges*, akár négyzetes mátrixok) az $\mathbf{E}$ mátrix oszlopai *és* sorai éppen az $\mathbb{R}^m$ tér kanonikus bázisvektorai.

Tétel 10 ***(i)*** *Egy tetszőleges* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *mátrixnak pontosan akkor van* jobboldali *inverze, ha* $\mathbf{A}$ *oszlopvektorai generátorrendszert alkotnak az* $\mathbb{R}^m$ *térben.*

Más szóval: $\mathbf{A}$ *oszloprangja* $= m$ *(azaz maximális).*

(ii) *Egy tetszőleges* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *mátrixnak pontosan akkor van* baloldali *inverze, ha sorvektorai generátorrendszert alkotnak az* $\mathbb{R}^n$ *térben. Más szóval:* $\mathbf{A}$ *sorrangja* $= n$ *(azaz maximális).*

(iii) *Négyzetes* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mátrixoknak pontosan akkor van* kétoldali *inverze, ha sor- és oszlopvektorai bázist alkotnak az* $\mathbb{R}^n$ *térben, más szóval:* $\mathbf{A}$ *rangja* $= n$ *(azaz maximális).* □

Következmény 11 ***(i)*** *Az* álló *mátrixoknak* sohasincs *jobboldali inverze, mert kevesebb oszlopuk van mint szükséges.*

(ii) *Egy* $\mathbf{A}$ fekvő *mátrixnak* pontosan akkor van *jobboldali inverze, ha oszlopvektorai generátorrendszert alkotnak az* $\mathbb{R}^m$ *térben. Ha ez teljesül, akkor* mindig *végtelen sok jobboldali inverze van* $\mathbf{A}$ *-nak.* □

A figyelmes Olvasó észrevehette, hogy a bevezető fejezetekben a **sorok** lineáris függetlenségét kaptuk a fekvő mátrixok jobbinverzének létezése feltételeként, a mostani következményben pedig az **oszlopok**ét. Ezt a látszólagos ellentmondást az a tétel oldhatja fel, hogy a mátrixok sor- és oszloprangja mindig megegyezik!

Megoldási módszer

A gyakorlatban nem csak azt kérdezzük, hogy van-e a mátrixnak inverze, hanem meg is kell keresnünk. Erre csak egy jólismert módszert említhetünk:

Az

$$\mathbf{AX} = \mathbf{E} \tag{20}$$

egyenletben ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{m\times m}$) $\mathbf{X}$ -et oszloponként keressük ("szétfűrészeljük" és "összerakjuk"), az $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^m$ oszlopvektorra ($j = 1, ..., n$) az

$$\mathbf{Ax}_j = \mathbf{e}_j \tag{21}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

A fenti (21) egyenletrendszerek ($j = 1, ..., m$) bal oldalai ugyanazok, tehát szimultán is meg lehet oldani őket, akár Gauss, akár elemi bázistranszformáció, akár tetszőleges más módszerrel. (Az $\frac{1}{\det(\mathbf{A})} adj\,(\mathbf{A})$ és hasonló képleteket nem ajánljuk, a rengeteg szükséges számolás miatt.)

Hivatkozások

[KB] **Krekó Béla:** *Lineéáris algebra*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1976.

[Sz 18] **Szalkai István:** *Miért van a mátrixoknak inverze*?, Haladvány Kiadvány 2018.02.15.
https://math.bme.hu/~hujter/180215.pdf

[Sz 19] **Szalkai István:** *Reguláris-SzingulárisTétel* ,
https://math.uni-pannon.hu/~szalkai/RegSzingTetel-2019.pdf

[W] https://**hu**.wikipedia.org/wiki/Mátrix_(matematika)