Haladvány Kiadvány http://math.bme.hu/~hujter/halad.htm
2023.08.25. http://math.bme.hu/~hujter/230825.pdf

A Burnside Lemma

Szalkai István

Pannon Egyetem, Matematika Tanszék, Veszprém
szalkai.istvan@mik.uni-pannon.hu

Kivonat

Burnside lemmája a kombinatorika hatékony, de nehéz, alig ismert eszköze. Most megpróbáljuk szemléletesen bemutatni, és a kétszínű nyakláncok problémáját általában megoldani.

Bevezetés

Bár Burnside Lemmája eredetileg tetszőleges X halmazon működő $G \subseteq S_X$ permutációcsoport pályáinak számáról szól, sikerrel alkalmazható kombinatorikában is. Elsősorban különböző geometriai alakzatok összeszámlálásakor, a permutációk ebben az esetben a geometriai transzformációk.

Jelen cikkünkben megpróbáljuk a lemmát és annak egy alkalmazását lehetőleg szemléletesen és ugyanakkor precízen bemutatni, az Olvasónak 9 oldalon kell keresztülrágni magát (vagy csak átlapozni). Sajnos nagyon kevés magyar nyelvű irodalom van ebben a témában.

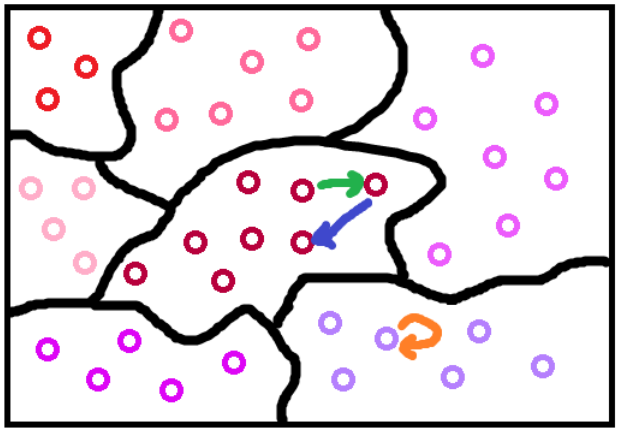
Feltételezzük az Olvasó jártasságát az ekvivalencia relációk és -osztályozások (halmazpartíciók) és a szimmetrikus csoportok (bijekciók csoportja) elméletének alapjaiban.

Gépelési problémák miatt a *binomiális együtthatókat* néha $\binom{n}{p}$ alakban jelöljük.

Az általános lemmát egy példával párhuzamosan mutatjuk be.

1. A Nyaklánc Probléma: **p** piros és **m** kék (egyébként egyforma) gyöngyből hányféle nyaklánc készíthető (az összekötés nem látszik) ?

2. Megoldási ötlet: Ha az n=p+m gyöngy helyzetét rögzítjük egy körön, pontosabban egy szabályos n -szög csúcsain, akkor $\binom{n}{p}$ -féle elrendezés (="átlátszó fénykép") van, azonban ezek közül bizonyosakat geometriai transzformációval (elforgatással, tengelyes tükrözéssel) egymásba vihetünk, vagyis ugyanazt a nyakláncot ábrázolják más-más nézőpontból. Tehát, ha az asztalra letesszük ezen $\binom{n}{p}$ fényképet, az azonos nyakláncokat ábrázolókat egy-egy kupacba rendezhetjük, és csak a kupacok *számát* kérdezzük. (Ezt az X={fényképek} halmaz **felosztásának** [partíciónak, osztályokra bontásnak] nevezzük, az "ugyanazon nyaklánc" **ekvivalencia reláció** szerint, $|X|=\binom{n}{p}$.) Az 1. ábrán láthatjuk az osztályokat, a zöld és kék nyilak különböző fényképek közötti azonosságot, azaz egy transzformációt jelölnek, a sárga nyíl egy olyan nyaklánc-fényképet és transzformációt jelez, amely fényképnek ezen transzformáltja önmaga, vagyis ez a fénykép ennek a transzformációnak a **fixpontja.** (Például a *helybenhagyás* [identitás] transzformációnak minden fénykép fixpontja.)



1. ábra: *Egy halmaz felosztása*

Matematikai segédeszközök

Megemlítettük, hogy a *két fénykép azonossága* ekvivalencia reláció vizsgálatánál a szabályos n -szög (önmagába történő) transzformációi kulcsszerepet játszanak. Házi feladat annak belátása, hogy ezen transzformációk halmaza pontosan

$$D_n = \{ id, f_1 , ... , f_{n-1} , t_1 , ... , t_n \}$$

ahol id az identitás (helybenhagyás), f_i a középpont körüli $i*360^o/n$ szögű elforgatás ($f_o = f_n = id$) és $t_1 , ... , t_n$ a szabályos n -szög önmagára történő tengelyes tükrözései **(**páratlan n esetén egy csúcs és a szemben levő oldal felezőpontján átmenő egyenesekre, páros n esetén két szemben levő csúcson vagy két szemben levő oldal felezőpontján átmenő egyenesekre**)**. Csak megemlítjük, hogy D_n -et a még a következő alakban is lehet írni : $D_n = \{ id, f_1 , ... , f_{n-1} , t , tf_1 , ... , tf_{n-1} \}$, ahol t *egy tetszőleges*, önmagára történő tükrözése a szabályos n -szögnek,

Ezt a D_n halmazt a **kompozíció** (egymás után elvégzés, összetett függvény képzése) műveletével n -edrendű **diédercsoportnak** nevezzük. D_n -et érdemes az S_n szimmetrikus csoport részcsoportjának tekintenünk: $D_n \subseteq S_n$ és a kompozíció mindkét halmazban ugyanaz. **(**Az S_n **szimmetrikus csoport** alaphalmaza az összes $\tau : I_n \to I_n$ *bijekció* (**permutáció**) halmaza $[I_n:=\{1,...,n\}]$, $| S_n | = n!$, a művelet pedig ismét e bijekciók közötti kompozíció.**)**

De hogyan kapcsoljuk össze az 1. ábrán látható, X→X függvényeket (színes nyilak) D_n elemeivel és a "fényképek azonossága" ekvivalencia relációval? Mivel Burnside lemmája permutációkról és az alaphalmaz elemeinek pályáiról szól, nekünk X→X permutációk (bijekciók) kellenek. Az 1. ábrán látható színes nyilak vajon ilyenek?

3. Definíció: Tetszőleges $\varphi \in D_n$ esetén legyen $\tau_\varphi : X \to X$ a következő függvény: minden $x \in X$ -re legyen $\tau_\varphi(x)$:= az x "fényképen" ábrázolt szabályos (színes) sokszögre alkalmazzuk a φ transzformációt (permutációt). □

4. Segédállítás: Minden $\varphi \in D_n$ esetén $\tau_\varphi : X \to X$ bijekció (azaz permutáció, vagyis $\tau_\varphi \in S_X$). Az

$$X_\tau := \{ \tau_\varphi : \varphi \in D_n \}$$

halmaz zárt a ◦ kompozíció műveletére (vagyis $(X_\tau, \circ)$ részcsoportja $(S_X, \circ)$ -nek).

Bizonyítás: $\tau_\varphi(x)$ minden $x \in X$ -re értelmezve van, tehát $Dom(\tau_\varphi)=X$.

X_τ zárt a ◦ -ra, mert $\tau_\psi \circ \tau_\varphi = \tau_{\psi\circ\varphi}$ minden $\varphi,\psi \in D_n$ esetén.

Nyilván $\tau_{id} = id_X$ és $\tau_\psi = (\tau_\varphi)^{-1}$ inverzfüggvény, ha ψ inverze φ -nek.

$\tau_\varphi(x)$ injektív, mert $\tau_\varphi(x_1) = \tau_\varphi(x_2)$ -ből

$$x_1 = \tau_{\psi\circ\varphi}(x_1) = \tau_\psi \circ \tau_\varphi(x_1) = \tau_\psi \circ \tau_\varphi(x_2) = \tau_{\psi\circ\varphi}(x_2) = x_2$$

következik, ahol ψ inverze φ -nek.

$\tau_\varphi(x)$ szürjektív, mert

$$y = \tau_\varphi(x) \quad <=> \quad \tau_\psi(y) = x$$

ha ψ inverze φ -nek. □

5. Segédállítás: HA k és m mindegyike legalább 3 , akkor

$$\psi \neq \varphi \quad <=> \quad \tau_\varphi \neq \tau_\psi ,$$

azaz $\psi \neq \varphi$ esetén $\tau_\varphi (x) \neq \tau_\psi (x)$ legalább egy $x \in X$ -re
(azaz a $\chi : \varphi \mapsto \tau_\varphi$ hozzárendelés injekció).

Bizonyítás: Tekintsünk például egy olyan $x_0 \in X$ nyaklánc fényképet, amelyen a p piros gyöngy egymás mellett van. Ekkor ezen x_0 -nek a φ forgatások szerinti τ_φ képei nyilván különböznek egymástól és a ψ tükrözések szerinti τ_ψ képei is különböznek egymástól. (Ez az érvelés $1 \le p < m$ esetén is érvényes.)

Tekintsük most azt az $x_{1,s}$ nyaklánc fényképet, amikor a gyöngyök sorrendje

$$\mathbf{x_{1,s}} := \mathbf{pkp...pk...k} \ .$$

Ennek bármely forgatása után az egyetlen **p** gyöngy után jobbra van az egyetlen **k** , tükrözés után pedig balra, vagyis $\tau_\varphi(x_{1,s}) \neq \tau_\psi(x_{1,s})$ bármely φ *forgatás* és bármely ψ *tükrözés* esetén. □

Megjegyzés: Ha p vagy m valamelyike legfeljebb 2, akkor a nyaklánc probléma triviális, felesleges lenne hozzá a nehéz Burnside Lemmát használnunk.

Azonban az általános nyaklánc problémát nem tudjuk a Burnside Lemma nélkül megoldani, amiben a τ permutációk átlagát kell kiszámítanunk, persze egyik τ -t sem számolhatjuk kétszer.

6. Definíció: Legyen $X \neq \emptyset$ *tetszőleges* halmaz és $(X_\tau,\circ)$ *tetszőleges* részcsoportja $(S_X,\circ)$ -nek. Definiáljuk ekkor $X\times X$ -en a következő $<>$ relációt: legyen tetszőleges $x_1,x_2\in X$ -re $x_1<>x_2$ ha $x_1 = \tau(x_2)$ valamely $\tau\in X_\tau$ függvényre. □

7. Segédállítás: $<>$ ekvivalencia reláció.
Bizonyítás: $<>$ reflexív, mert $x = id(x)$. $<>$ szimetrikus, mert $x_1 = \tau(x_2) <=> x_2 = \tau^{-1}(x_1)$. $<>$ tranzitív, mert $x_1=\tau(x_2)$ és $x_2=\pi(x_3)$ -ból következik $x_1 = \pi\circ\tau(x_3) = \pi(\tau(x_3))$. □

8. Segédállítás: Ha X a bevezetőben elemzett p piros és m kék gyöngyből készített nyakláncok halmaza, n=p+m, $(X_\tau,\circ)$ és $<>$ a D_n transzformációk alapján készített és permutációcsoport és reláció, akkor az $<>$ szerinti ekvivalenciaosztályok elemei éppen az azonos nyakláncokat különböző nézőpontból bemutató fényképek halmazai, és így az ekvivalenciaosztályok száma éppen arra ad választ, hogy k piros és m kék gyöngyből hány különböző nyaklánc készíthető. □

9. Megjegyzés: Bármely X véges halmaz és annak *tetszőleges* Π felosztásához megadható egy olyan $X_\tau\subseteq S_X$ permutációcsoport, amely szerinti $<>$ reláció szerinti osztályozás éppen Π .
Bizonyítás: Ha $\tau:X\to X$ egy olyan permutáció, amely Π minden részhalmazán egy ciklus, akkor a τ által generált részcsoport megfelel X_τ -nak. □

(Részletesen: legyenek Π osztályai $B_i\subseteq X$, $i=1,...,k$, $B_i = \{ x_{i,j} : j=1,...,\ell_i \}$, $\ell_i=|B_i|$, majd $\tau:X\to X$ a következő függvény: $\tau(x_{i,j}) := x_{i,j}$ ha $j<\ell_i$ és $\tau(x_{i,\ell i}) := x_{i,1}$. Ekkor

$$X_\tau := \{id, \tau, \tau^2, \dots , \tau^{N-1} \} \quad \text{ahol} \quad N = lkkt(\ell_1 , \dots , \ell_k) \ .$$ **)** □

Általánosítás és a Lemma

10. Általános probléma: Legyen X egy tetszőleges halmaz és tekintsünk egy $X\to X$ permutációkból (=transzformációk) álló G csoportot. (A bevezetőben ez volt X_τ .)
Feladat: Keressük X olyan $x_1,\dots, x_k$ elemeit, amelyek egyike sem vihető át G valamelyik permutációjával egy másikba. **Pontosabban**: csak a k értékét keressük. □

11. Definíciók: Tetszőleges $x\in X$ esetén legyen $\mathbf{P_x} := \{ \tau(x) : \tau\in G\}$ az x elem **pályája**, vagyis amely elemekbe x -et G *valamely* transzformációja átviszi (tehát $y=\tau(x)\in X$, $P_x\subseteq X$) .

Tetszőleges $x\in X$ esetén legyen $\mathbf{F_x} := \{ \tau\in G : \tau(x)=x \}$ azon *transzformációk* halmaza, amelyeknek x fixpontja.

Tetszőleges $\tau\in G$ transzformáció esetén legyen $\mathbf{supp}(\tau) := \{ x\in X : \tau(x)=x \}$ a τ transzformáció fixpontjaink halmaza (τ **tartóhalmaza**, support set). □

12. Állítás: $\tau \in F_x \Leftrightarrow x \in supp(\tau)$. □

A 10. pontban megfogalmazott általános feladat szerint a keresett $x_1,\ldots, x_k$ elemek különböző pályákon kell, hogy legyenek, vagyis X -en G által létrehozott *pályák számát* keressük.

13. Állítás: A különböző pályák diszjunktak, vagyis $P_x \cap P_y \neq \varnothing$ esetén $P_x = P_y$.
Bizonyítás: Ha $z \in P_x \cap P_y$, akkor $z = \tau_1(x) = \tau_2(y)$, vagyis $y=(\tau_2)^{-1}\tau_1(x)$ és $x=(\tau_1)^{-1}\tau_2(y)$.
Ha $u \in P_x$, akkor $u=\tau_3(x) = \tau_3((\tau_1)^{-1}\tau_2(y)) = \tau_3(\tau_1)^{-1}\tau_2(y)$ vagyis $u \in P_y$ azaz $P_x \subseteq P_y$.
Ha $v \in P_y$, akkor $v=\tau_4(y) = \tau_4((\tau_2)^{-1}\tau_1(x)) = \tau_4(\tau_2)^{-1}\tau_1(x)$ vagyis $v \in P_x$ azaz $P_y \subseteq P_x$. □

14. Állítás: Bármely $x,y \in X$ esetén x -et *ugyanannyi* transzformáció hagyja fixen, mint amennyi x -et y -ba átviszi.
Bizonyítás: Legyen F_x *összes* eleme $\{ \tau_1 , \tau_2 , \ldots \tau_h \}$ és ρ egy (tetszőleges) olyan permutáció, amely x-et y-ba viszi át: $y=\rho(x)$. Állítjuk, hogy *csak* a $\rho\tau_i$ transzformációk viszik át x -et y -ba. **(**Ezek a permutációk mind különbözőek, mert a $\{\tau_1,\tau_2,\ldots\tau_h\}$ permutációk is különbözőek és G csoport.**)** Ha ugyanis $y=\pi(x)$ valamely π permutációra, akkor $x=\rho^{-1}\pi(x)$ vagyis $\rho^{-1}\pi = \tau_i$ valamely τ_i permutációra, ahonnan $\pi = \rho\tau_i$. □

15. Megjegyzés: Mivel minden $x \in X$ esetén $x \in P_x$, az állítást úgy is fogalmazhatnánk, hogy a P_x pálya minden elemébe ugyanannyi transzformáció viszi x -et. Azonban az állítás eredeti megfogalmazása hasznosabb az alkalmazásokhoz.

16. Következik: x -et P_x bármelyik y elemébe ugyanannyi (de különböző) transzformáció viszi át, mint ahány eleme van F_x -nek (és $x \in P_x$ és G minden eleme viszi x -et valahová), ezért *minden* $x \in X$ -re

$$|P_x|*|F_x| = |G| \quad \text{azaz} \quad |F_x| = |G|/|P_x| \quad .$$ □

17. Következik: Összegezve minden $x \in X$ -re kapjuk:

$$\Sigma_{x\in X} |F_x| = \Sigma_{x\in X} |G|/|P_x| = |G|* \Sigma_{x\in X} 1/|P_x| ,$$

majd |G| -vel átosztva kapjuk:

$$(\Sigma_{x\in X} |F_x|) /|G| = \Sigma_{x\in X} 1/|P_x| \quad .$$

Ezt szemlélteti az alábbi táblázat:

G \ X	x_1	. . .	x_j	. . .	$x_{\|X\|}$	
τ_1						$\Sigma= \|supp(\tau_1)\|$
. . .						. . .
τ_i			0 / 1			$\Sigma= \|supp(\tau_i)\|$
. . .						. . .
$\tau_{\|G\|}$						$\Sigma=\|supp(\tau_{\|G\|})\|$
	$\Sigma = \|F_1\|$	. . .	$\Sigma = \|F_j\|$	. . .	$\Sigma = \|F_{\|X\|}\|$	$\Sigma\Sigma = \Sigma\Sigma$

1. táblázat: $|F_i|$ és $|supp(\tau_j)|$ *kapcsolata*

18. Következik: A Definíciók után észrevett ” $\tau \in F_x \Leftrightarrow x \in supp(\tau)$ ” összefüggés alapján (ha az összetartozó (x,τ) elempárokat számoljuk össze, például egy táblázat sorait és oszlopait összeadva) kapjuk (ezt jelzi a táblázat jobb alsó mezőjébe írt ”ΣΣ=ΣΣ” kifejezés) :

$$\Sigma_{x \in X} |F_x| = \Sigma_{\tau \in G} |supp(\tau)| \ . \qquad \square$$

A jobboldali $x \in X$ szerinti összegezést csoportosítsuk a pályák szerint (13. Állítás szerint ezek egy felosztását adják X -nek). Mivel mindegyik pályában a pályabeli elemek pályája ugyanaz, tehát ugyanannyi elemből áll, ezért mindegyik ilyen csoport esetén a reciprokösszeg 1. Vagyis a jobboldali összeg éppen *a pályák száma*!

Bebizonyítottuk tehát **Burnside lemmáját:**

19. Burnside Lemma:

$$(\Sigma_{\tau \in G} |supp(\tau)|) / |G| \quad = \quad \text{a pályák száma} \qquad (\text{jelben: } = |X/G|) \ ,$$

vagyis: ”az egyes transzformációk által fixen hagyott elemek *átlagos száma* megegyezik a pályák, vagyis a különbözőnek tekintett elemek számával.” $\square$

20. Megjegyzések: A 17. Következmény szerint a pályák számát a $(\Sigma_{x \in X} |F_x|) / |G|$ kifejezéssel is megkaphatjuk, azonban általában a $\Sigma_{x \in X} |F_x|$ összeg meghatározása nehezebb, mint a $\Sigma_{\tau \in G} |supp(\tau)|$ összegezés.

Az X/G jelölés arra utal, hogy a G csoport határozza meg az $y \in P_x$ ekvivalencia relációt, mely szerinti faktorizáció a (különböző) pályák halmazát adja meg.

A Wikipédia szerint ezt először nem Burnside fedezte fel. Burnside 1897-ben megjelent könyvében ezt Frobenius 1887 -es eredményének tartotta, de valójában már Cauchy is ismerte 1845 -ben.

A nyaklánc probléma megoldása

Az **általános**, **p** piros és **m** kék gyöngyből álló nyakláncos feladat **megoldása.**
A $p \leq 2$ vagy $m \leq 2$ esetek triviálisak, tehát $3 \leq p \leq m$ feltehető.

A bevezetőben leírtak szerint $n=p+m$, X = a nyaklánc fényképek halmaza ($|X| = \binom{n}{p}$) és

$$G = X_\tau = \{ \tau_\varphi : \varphi \in D_n \}, \quad |X_\tau| = |D_n| = 2n.$$

Most mindegyik $\tau_\varphi \in D_n$ transzformációra meg kell határoznunk τ_φ fixpontjainak számát, vagyis azon nyaklánc-fényképek *számát*, amelyek szimmetrikusak erre a transzformációra. (Ezen fixpontok között persze lehetnek átfedések is, ugyanaz a fénykép több transzformációnak is lehet fixpontja.)

Tükrözések

Legyen ψ tükrözés, összesen n tükrözés van D_n -ben.

páratlan n **és páratlan** p

A tengely átmegy egy csúcson, ez piros, tehát a többi piros egyik fele a tengely egyik oldalán van, másik fele a másik oldalon, egymásra szimmetrikusan. A lehetőségek száma egyetlen tükrözésre $\binom{(n-1)/2}{(p-1)/2}$ binomiális együttható. Az összes tükrözésekre ez együttesen

$$\tau(n,p) = n^* \binom{(n-1)/2}{(p-1)/2}$$

fixpont.

páratlan n **és páros** p

A tengely átmegy egy csúcson, ez kék. Az előző esethez hasonlóan $\binom{(n-1)/2}{p/2}$ lehetőség. Az összes tükrözésekre ez együttesen

$$\tau(n,p) = n^* \binom{(n-1)/2}{p/2}$$

fixpont.

páros n **és páros** p

Ha a tengely *nem* megy át két átellenes csúcson (ilyen tükrözés n/2 van), akkor az eddigiekhez hasonlóan $\binom{n/2}{p/2}$ lehetőség van.

Ha a tengely *átmegy* két átellenes csúcson (ilyen tükrözés is n/2 van), akkor két eset lehet:

vagy a tengely két csúcsa piros, ez $\binom{(n-2)/2}{(p-2)/2}$ lehetőség,

vagy a tengely két csúcsa kék, ez $\binom{(n-2)/2}{p/2}$ lehetőség.

Az összes tükrözésekre ez együttesen

$$\tau(n,p) = {}^{n}/_{2} * \left[\binom{n/2}{p/2} + \binom{(n-2)/2}{(p-2)/2} + \binom{(n-2)/2}{p/2} \right]$$

fixpont.

páros n **és páratlan** p

Ez csak úgy lehet, hogy a tengely átmegy két átellenes csúcson (ilyen tükrözés is n/2 van), egyik kék másik piros, és a maradék piros csúcsok fele a tengely egyik, a másik fele a másik oldalán van, akárhol, egymásra szimmetrikusan. Ekkor a lehetőségek száma $\binom{n/2}{(p-1)/2}$. Az összes tükrözésekre ez együttesen

$$\tau(n,p) = n^* \binom{n/2}{(p-1)/2}$$

fixpont.

Forgatások

Legyen φ_i forgatás, $i*360^o/n$ szöggel, $0 \le i \le n-1$.
$i = 0$ esetén $\varphi_i = id$ (helybenhagyás), aminek mind az $\binom{n}{p}$ nyaklánc fixpontja.

Tehát $0<i$. φ_i ismételgetésével a nyaklánc összes pontja (akár piros akár kék) előbb-utóbb visszatér eredeti helyére, mégpedig egyszerre. A legelső ilyen helyzet i -től függ.

21. Definíció: Legyen G egy tetszőleges csoport (akár véges akár végtelen), $g \in G$ tetszőleges. A g elem **rendje** (order) a legkisebb r szám, amelyik hatványa g -nek a G egységeleme:

$$o(g) := \min \{ t \in N : g^r = id_G \},$$

ha ilyen r létezik, egyébként pedig $o(g) := \infty$. □

Nyilván $o(id)=1$ és véges csoport minden elemének rendje véges.

22. Állítás: A φ_i forgatás rendje $o(\varphi_i) = n / lnko(i,n)$.

Bizonyítás: r (és ℓ) az a legkisebb pozitív szám, amelyre φ_i^t szöge a teljesszög egész számszorosa, vagyis

$$r*i*360^o/n = \ell*360^o$$

azaz

$$r*i = \ell*n .$$

Mivel r és ℓ a lehető legkisebbek, ezért a fenti szám csak lkkt(i,n) lehet:

$$r*i = \ell*n = lkkt(i,n) ,$$

ahonnan

$$r = o(\varphi_i) = lkkt(i,n) /i = i*n /lnko(i,n) / i = n /lnko(i,n) .$$ □

23. Megjegyzés: Mivel a nyaklánc szabályos n-szög, ezért *minden* gyöngy *pontosan* r forgatás után tér vissza eredeti helyére legelőször, vagyis egyszerre! Ezen r mozdítás során egy-egy gyöngy által érintett pontok halmazai (a csúcspont **pályája**) diszjunktak és r méretűek. Ez vonatkozik a piros gyöngyökre is, és természetesen piros gyöngy pályája pirosakból áll. Tehát a φ_i -re szimmetrikus piros alakzat felbomlik p/r sok, r méretű diszjunkt halmazra.
Vigyázat: $p<r$ esetén nincs r piros gyöngyünk, tehát ez esetben φ_i -nek nincs fixalakzata!
Ebből, és a 22. Állítás utolsó sorából többek között következik:

24. Következmény: $p \geq r$ esetén $r \mid n$ és $r \mid p$, tehát **$r \mid lnko(n,p)$** . □

25. Állítás: A piros fixpont alakzatok pontosan a következőképpen nézhetnek ki:
Az $1,..., {}^n/_r$ sorszámú csúcsokra tegyünk tetszőlegesen ${}^p/_r$ piros gyöngyöt, és ezt az alakzatot r -szer elforgatva az érintett csúcsokra tegyünk piros gyöngyöket. □

26. Következmény: A fixalakzatok száma $\binom{n/r}{p/r}$ *ha* $r \leq p$, ahol $r = n/lnko(i,n) \mid p$.

$p<r$ esetén φ_i -nek nincs fixalakzata!

Speciálisan: $lnko(i,n)=1$ esetén φ_i -nek nincs fixalakzata,

és $lnko(n,p)=1$ esetén egyetlen (nem id) forgatásnak sincs fixalakzata.

Az $n/lnko(i,n) \mid p$ feltétel úgy is fogalmazható, hogy $lnko(i,n) = n/d$ ahol d valamely osztója p -nek. □

27. Jelölés: Legyen $\spadesuit_{n,p}(i)$ a következő függvény, ahol $0 \leq i \leq n-1$ és $r=n/lnko(i,n)$:

$$\spadesuit_{n,p}(0) := \binom{n}{p} ,$$

$$\spadesuit_{n,p}(i) := \binom{n/r}{p/r} \quad \text{ha} \quad r \leq p \text{ és } r \mid p$$

$$\spadesuit_{n,p}(i) := 0 \quad \text{ha} \quad p<r \text{ vagy nem } r \mid p .$$ □

Megjegyzések: $i=0$ ($\varphi_i = id$) esetén $lnko(0,n)=n$, $r=n/n=1$, vagyis a középső képlet $i=0$ esetén is érvényes.

$r \leq p$ azt jelenti, hogy $n/lnko(i,n) \leq p$, azaz $n/p \leq lnko(i,n)$.

Tehát a végső képlet:

28. Tétel:

$$gy(n,p) = \frac{\tau(n.p) + \sum_{i=1}^{n} \spadesuit_{(n,p)}(i)}{2n}$$

□

A p=6, n=30 speciális eset

Képletünket ellenőrizhetjük a KöMal-ban megjelent példa segítségével.

Mivel n és p páros, ezért

$$\tau(30,6) = {}^{n}/_{2} * [\binom{n/2}{p/2} + \binom{(n-2)/2}{(p-2)/2} + \binom{(n-2)/2}{p/2}] =$$
$$= {}^{30}/_{2} * [\binom{30/2}{6/2} + \binom{28/2}{4/2} + \binom{28/2}{6/2}] =$$
$$= 15 * [\binom{15}{3} + \binom{14}{2} + \binom{14}{3}] = 13\,650 .$$

Ezután olyan $0 \le i \le 29$ számokat kell keresnünk, amelyekre

$$30/6 = \underline{5 \le \text{lnko}(i,30)} \quad \text{és} \quad r=30/\text{lnko}(i,30) \mid 6 .$$

Ez legutóbbi azt jelenti, hogy $30/\text{lnko}(i,30)=1,2,3$ vagy 6 , vagyis

$$\text{lnko}(i,30) = 30, 15, 10 \text{ vagy } 5 .$$

Ezek a következők:

i = 0 => r=1 => $\spadesuit_{30,6}(0) := \binom{30}{6} = 593\,775$

i = 5 => r=6 => $\spadesuit_{30,6}(5) := \binom{5}{1} = 5$

i = 10 => r=3 => $\spadesuit_{30,6}(10) := \binom{10}{2} = 45$

i = 15 => r=2 => $\spadesuit_{30,6}(15) := \binom{15}{3} = 455$

i = 20 => r=3 => $\spadesuit_{30,6}(20) := \binom{10}{2} = 45$

i = 25 => r=6 => $\spadesuit_{30,6}(5) := \binom{5}{1} = 5$

összesen: 594 330,

tehát a végeredmény gy(30,6) = (13650+594330)/60 = 10 133

Irodalom

Freud Róbert, Horváth Eszter: *Nyakláncok, lyukas négyzetek és oszthatóság*, KöMaL 2022/9, 514-519 old.

Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába*, Typotex kiadó.

Wikipédia: *Burnside's lemma* https://en.wikipedia.org/wiki/Burnside's_lemma
(sajnos magyar nyelvű oldal nincs)