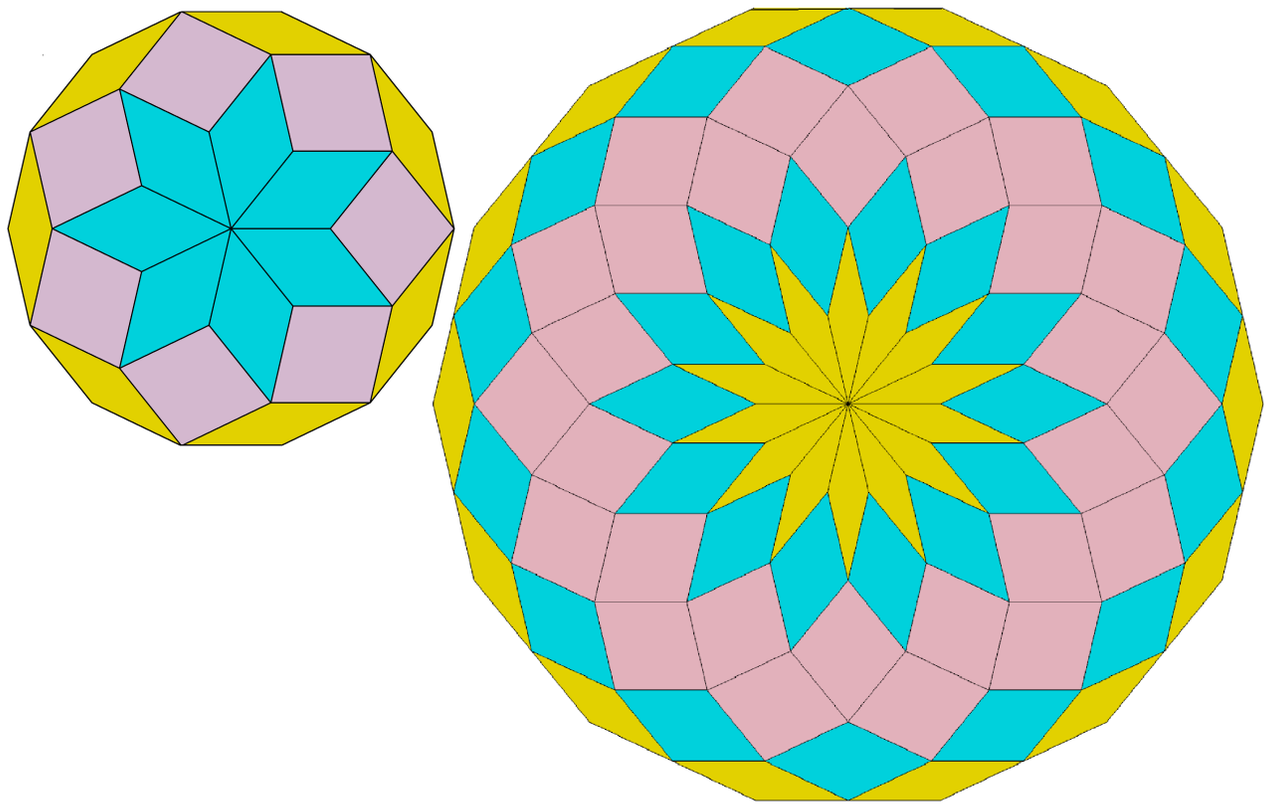
Haladvány Kiadvány 2023.10.27

A szabályos 14-szög felbontása rombuszokra

Hujter Mihály · hujter.misi@gmail.com
Kabai Sándor · unico.kabai@gmail.com

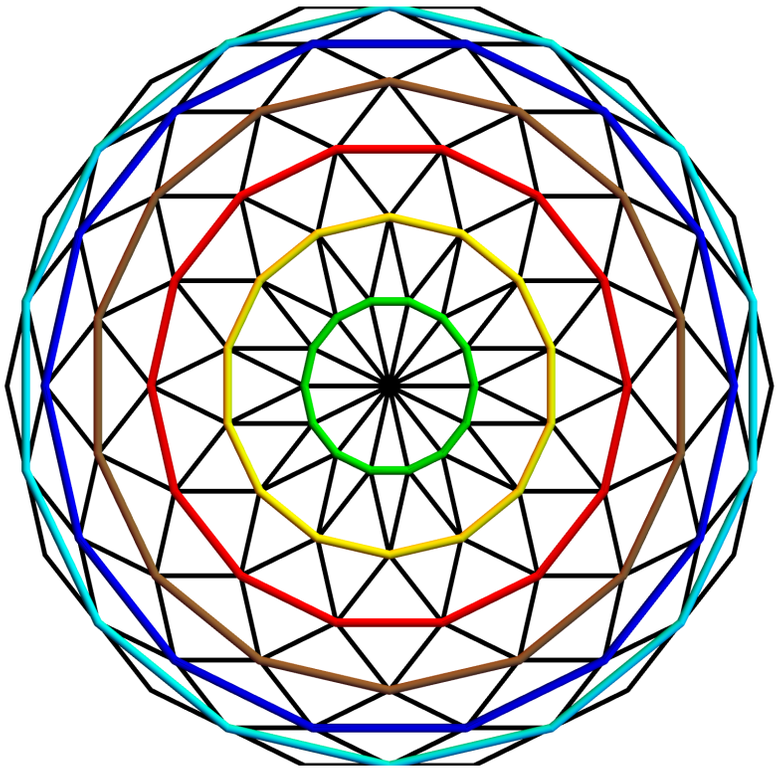
Az ábrán egységnyi élhosszúságú rombuszok látható, méghozzá három féle méretben. Ezekből alkotott mozaikok az 1 egységnyi illetve a 2 egységnyi oldalhosszúságú szabályos 14-szög (angolul: *tetradecagon*).

A nagyobbik 14-szög belsejében további szabályos 14-szögek lelhetők fel: Van 14 darab olyan, melyek oldalhosszúsága egységnyi, átellenes csúcspárjait pedig a nagy 14-szög középpontja illetve a nagy 14-szög csúcsai alkotják; ezek mind



egymás elforgatottjai; az elforgatás középpontja megegyezik a nagy 14-szög centrumával. További 6 darab szabályos 14-szöget találunk a jobb oldalon, a középpontra szimmetrikusan. Ezen 6 darab szabályos 14-szöget a színes vonalak jelzik. Ezen 14-szögek közül a legkisebbnek (a zöldnek) a legnagyobb átlója 2 egségnyi hosszúságú, a legnagyobbnak (a világoskéknek) a csúcsait pedig a nagy 14-szög oldalfelező pontjai alkotják. Összességében tehát a jobb oldalon 21 darab szabályos 14-szög valósul meg úgy, hogy azok csúcsai mind a rombuszok csúcsaiból kerülnek ki. Érdekesség, hogy az itt listázott 21 darabból a két legkisebb (a sárga és a zöld színnel jelzett) 14-szög csúcsai megtalálhatók Malajzia zászlaján és államcímerében is, az aranycsillag domború és homorú csúcsainál.

Tekintsük a mozaikokatt alkotó rombuszok hegyesszögeit. Könnyen látható, hogy ezek ϑ, 2ϑ és 3ϑ, ahol $\vartheta = \pi/7$. Mivel $3\vartheta + 4\vartheta = \pi$, ezért $\sin 3\vartheta = \sin 4\vartheta$, és így a szinusztétel miatt az $a = \sin \vartheta$, $b = \sin 2\vartheta$, $c = \sin 3\vartheta$ oldalú háromszög szögei éppen ϑ, 2ϑ, 4ϑ, tehát ez egy tompaszögű háromszög. Márpedig a háromféle rombuszterület éppen $a \approx 0.434$, $b \approx 0.782$ és $c \approx 0.975$, hiszen a háromféle



rombusznál a párhuzamos oldalak távolsága éppen a, b és c. Sok érdekes képlet kapcsolja egymáshoz ezt a három számot, például a következő:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Azaz $2a$ éppen b és c harmonikus közepe. Ennek az egyenlőségnek az a geometriai jelentése, hogy a szóbanforgó háromszögben az egyik magasságvonal hossza egyenlő a másik két magasság összegével. A fenti egyenlőséget a jelen dolgozat végén bizonyítjuk majd. További érdekes összefüggések találhatók az első szerző két évvel korábbi dolgozatában (melynek az elérhetősége a jelen dolgozat végén található).

Ha három tizedesjegyre kerekítjük a, b és c értékét, akkor pedig a fenti egyenlőség kerekítési hibájának a $\frac{3}{80}$-szorosából a

$$\frac{0.0375}{0.782} + \frac{0.0375}{0.975} - \frac{0.0375}{0.434} = \frac{11}{1103011}$$

képletet nyerjük, ahol a jobb oldal érdekessége, hogy a számláló is és a nevező is *palindromszám*, ami azt jelenti, hogy hátulról előre olvasva ugyanaz.

A jól ismert trigonometrikus addíciós képletekből is könnyen nyerünk összefüggéseket a, b és c pontos értéke között:

$$a = 2c\sqrt{1-c^2} \;\; ; \quad b = 2a\sqrt{1-a^2}; \quad c = 2b\sqrt{1-b^2}$$

Ezekből algebrai átalakításokkal megkapható, hogy $a^2 < b^2 < c^2$ éppen a

$$64z^3 - 112z^2 + 56z - 7$$

polinom három gyöke, azaz

$$\begin{aligned} A &= 64a^6 - 112a^4 + 56a^2 - 7 \\ B &= 64b^6 - 112b^4 + 56b^2 - 7 \\ C &= 64c^6 - 112c^4 + 56c^2 - 7 \end{aligned}$$

mindegyike nulla. Valóban

$$\begin{aligned} A &= 64a^6 - 112a^4 + 56a^2 - 7 \\ &= 64(4c^2(1-c^2))^3 - 112(4c^2(1-c^2))^2 \\ &\quad +56(4c^2(1-c^2)) - 7 \\ &= C \cdot \left(-64c^6 - 80c^4 - 24c^2 + 1\right) \end{aligned}$$

Hasonlóképpen

$$\begin{aligned} B &= 64b^6 - 112b^4 + 56b^2 - 7 \\ &= A \cdot \left(-64a^6 - 80a^4 - 24a^2 + 1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 64c^6 - 112c^4 + 56c^2 - 7 \\ &= B \cdot \left(-64b^6 - 80b^4 - 24b^2 + 1\right) \end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned} -64a^6 - 80a^4 - 24a^2 + 1 &\approx -6.780 \\ -64b^6 - 80b^4 - 24b^2 + 1 &\approx -58.18 \\ -64c^6 - 80c^4 - 24c^2 + 1 &\approx -149.0 \end{aligned}$$

és

$$6.780 \cdot 58.18 \cdot 149.0 \approx 587$$

ezért $A = B = C = 0$.

Tehát a $64z^3 - 112z^2 + 56z - 7$ polinom gyökei valóban a^2, b^2 és c^2. Ennek a ténynek az átfogalmazása a következő:

$$\frac{7}{8} = 8a^6 - 14a^4 + 7a^2 = 8b^6 - 14b^4 + 7b^2 = 8c^6 - 14c^4 + 7c^2$$

Következésképpen (a gyökök és együtthatók közti ismert összefüggések alapján)

$$abc = \frac{\sqrt{7}}{8}\,; \qquad a^2 + b^2 + c^2 = \frac{7}{4}\,; \qquad a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{7}{8}$$

Tehát a, b és c mértani közepe pontosan $\sqrt[6]{7}/2 \approx 0.692$, a négyzetes közepe pedig $\sqrt{7/3}/2 \approx 0.764$. A fentiekből a számtani közepet is ki tudjuk számolni, hiszen

$$(ab + bc + ca)^2 - \left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) = 2abc\,(a + b + c)$$

azaz

$$(ab+bc+ca)^2-\frac{7}{8}=\frac{\sqrt{7}}{4}(a+b+c)$$

Másrészt

$$(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)=2\left(ab+bc+ca\right)$$

azaz mindkét oldalt négyzetre emelve

$$\left((a+b+c)^2-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{7}{2}+\sqrt{7}(a+b+c)$$

Ebből azt nyerjük, hogy $a+b+c$ az egyik gyöke a

$$16x^4-56x^2-16\sqrt{7}x-7$$

polinomnak. De ennek a polinomnak csak egyetlen pozitív gyöke van, amely értéke közelítőleg 2.1906. Tehát a, b és c számtani közepe közelítőleg 0.730.

Mivel a negyedfokú polinomegyenletek képlettel is megoldhatók, ezért pontos képletet is tudnánk adni $a+b+c$ értékére, de az a képlet meglehetősen bonyolult lenne.

Most térjünk vissza az egységnyi oldalhosszúságú szabályos 14-szöghöz. Az ábrán kétféle felbontását is látjuk, és mindkét felbontásból az jön ki a 14-szög területe $7(a+b+c)$. A fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy a szabályos 14-szög területe a

$$\begin{aligned} & 7^4 \cdot \left(16\left(\frac{x}{7}\right)^4 - 56\left(\frac{x}{7}\right)^2 - 16\sqrt{7}\left(\frac{x}{7}\right) - 7\right) \\ = \;& 16x^4 - 2744x^2 - 5488\sqrt{7}x - 16807 \end{aligned}$$

polinomnak az egyetlen pozitív gyöke, közelítőleg 15.335.

Végezetül megmutatjuk, hogy a terület pontos értéke: $t = 14a + \frac{7^{3/2}}{2}$. Mivel fent láttuk, hogy a terület $7(a+b+c)$, azt kell megmutatnunk, hogy $b+c-a = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Előbb azonban bizonyítjuk, hogy $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, azaz azt hogy $bc = ab + ca$, hiszen

$$\frac{-1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + ca - bc}{abc}$$

A közelítő értékekből is világos, hogy

$$(ab + bc + ca)\,(-ab + bc + ca)\,(ab + bc - ca) \;> 0.875$$

Tehát elegendő megmutatnunk, hogy

$$(ab + bc + ca)\,(-ab + bc + ca)\,(ab - bc + ca)\,(ab + bc - ca) = 0$$

Mindazonáltal

$$\begin{aligned} & (ab + bc + ca)\,(-ab + bc + ca)\,(ab - bc + ca)\,(ab + bc - ca) \\ = \quad & 2a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) - \left(a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4\right) \end{aligned}$$

Itt egyrészt

$$2a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{8}\right)^2 \cdot \frac{7}{4} = \frac{49}{128}$$

Másrészt

$$\begin{aligned} & a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 \\ = \; & (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 - 2a^2b^2c^2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \\ = \; & \left(\frac{7}{8}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{8}\right)^2 \cdot \frac{7}{4} = \frac{49}{128} \end{aligned}$$

Ezzel bizonyítottuk, hogy $ab - bc + ca = 0$.

Feladatunk még annak a bizonyítása, hogy $b + c - a - \frac{\sqrt{7}}{2} = 0$. Mármost

$$p = \left(b - c + a - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(-b + c + a - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(b + c + a + \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$$

esetén $p \approx 2.645$, továbbá

$$\begin{aligned}
& 16p\left(b+c-a-\frac{\sqrt{7}}{2}\right) \\
= \;& 32(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+56(a^2+b^2+c^2) \\
& -16(a^4+b^4+c^4)-64\sqrt{7}abc-49 \\
= \;& 32\cdot\frac{7}{8}+56\cdot\frac{7}{4}-16(a^4+b^4+c^4)-64\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{8} \\
= \;& 21-16(a^4+b^4+c^4) \\
= \;& 21-16\left(\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\right) \\
= \;& 21-16\cdot\left(\left(\frac{7}{4}\right)^2-2\cdot\frac{7}{8}\right) \\
= \;& 0
\end{aligned}$$

Legeslegvégezetül összefoglaljuk, mit tudtunk meg a jelen dolgozatban emlegetett 21 darab szabályos 14-szög területéről. Az első ábra bal oldalán látható 14-

szög területe $7^{3/2}/2 + 14\sin\frac{\pi}{7} \approx 15.335 = 15.\,335$, a jobb oldalon láthatóé pedig négyszer akkora, azaz $14\sqrt{7} + 56\sin\frac{\pi}{7} \approx 61.34$. Az elsőként említettel egybevágó további 14 darab 14-szög területe nyilván szintén $7^{3/2}/2 + 14\sin\frac{\pi}{7}$. A második ábrán a színes pöttyök által kijelölt szabályos 14-szögeket a színek szerint neveztük el. A következő táblázat mutatja a területüket kétféle pontos képlettel és egy közelítő numerikus értékkel. A táblázat középső két oszlopa közti különbség abból adódik, hogy $2b + 2c = 2a + \sqrt{7}$.

világoskék	$21a + 28b + 28c$	$= 14\sqrt{7} + 49a$	≈ 58.30
sötétkék	$14a + 21b + 28c$	$= 14\sqrt{7} + 42a - 7b$	≈ 49.79
barna	$14a + 14b + 21c$	$= 21\sqrt{7}/2 + 35a - 7b$	≈ 37.49
piros	$14a + 14b + 7c$	$= 7\sqrt{7}/2 + 21a + 7b$	≈ 23.84
sárga	$14a + 7b$		≈ 11.55
zöld	$7a$		≈ 3.04

Slusszpoénként észrevételezzük, hogy a piros és a barna 14-szögek területének összegéből a zöld 14-szög területének 8-szorosát levonva pontosan $14\sqrt{7}$-et kapunk.

Hivatkozások:

Tetradecagon - szócikk, Wikipaedia.
https://en.wikipedia.org/wiki/Tetradecagon

Malajzia zászlaja és államcímere, Wikipédia.
https://en.wikipedia.org/wiki/Tetradecagon#/media/File:Flag_of_Malaysia.svg
https://hu.wikipedia.org/wiki/Malajzia#/media/F%C3%A1jl:Coat_of_arms_of_Malaysia.svg

Hujter M.: A szabályos tizennégyszög egészszám-tulajdonságáról, Haladvány Kiadvány 2021-12-02.
https://math.bme.hu/∼hujter/211202.pdf

Palindromszámok - szócikk, Wikipédia.
https://hu.wikipedia.org/wiki/Palindromsz%C3%A1mok