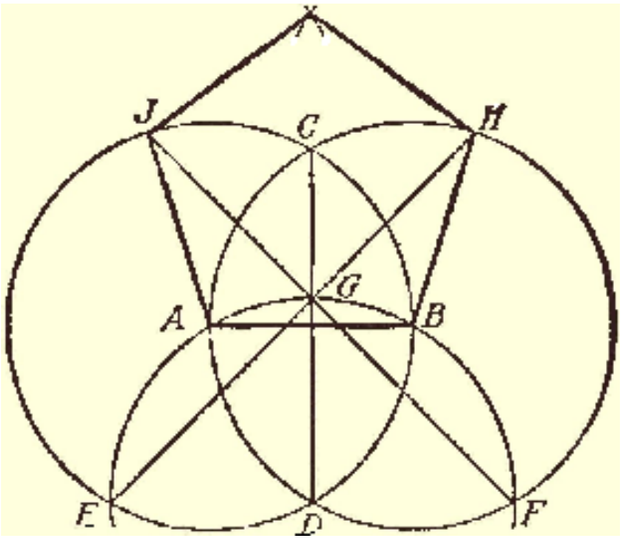

Haladvány Kiadvány 2023.11.14

Dürer kissé pontatlan ötszögszerkesztése

Hujter Mihály · hujter.misi@gmail.com

Az ábra azt mutatja, hogyan próbálkozott Dürer az egységnyi oldalú szabályos ötszög szerkesztésével. Először felvette az egységnyi hosszúságú AB szakaszt, majd A illetve B középponttal rajzolt egy-egy egységnyi sugarú kört, melyek metszéspontja C és D. Most D középponttal újabb egységnyi sugarú kör következett, és ezen kör az előző kettőből kimetszette az E és F pontokat, rovábbá a CD

szakaszból a G pontot. Az EG illetve az FG félegyenesek metszik ki az első két körből a H és J pontokat.

Dürer azt feltételezte, hogy a J, A, B, H pontok egy szabályos ötszöget definiálnak. Ha ez így lenne, akkor a $JB = AH$ hosszúság értékenek és a JH szakaszhossznak is $\left(1+\sqrt{5}\right)/2 \approx 1.618034$ nagyságúnak kellene lennie. A pontos számítások azonban nem ezt mutatják.

Felveszünk egy derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy $A = (\frac{-1}{2}, 0)$ és $B = (\frac{1}{2}, 0)$. Ekkor $E = \left(-1, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$, $F = \left(1, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$, $G = \left(0, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Az FG egyenes egyenletét $ax + by = 1$ alakban keressük. Mivel átmegy az F és G pontokon, ezért

$$a \cdot 1 + b \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = 1 \quad ; \qquad a \cdot 0 + b \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$$

Ebből azt nyerjük, hogy $a = b = 4 + 2\sqrt{3}$. Mivel $\left(4 + 2\sqrt{3}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$, ezért az egyenes egyenlete $x + y = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ alakban is írható. Tekintve, hogy az első kör egyenlete $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$, megkapjuk, hogy J első koordinátája:

$$\xi = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{3} - 1} \approx -0.8151$$

Tehát a JH szakasz hossza:

$$-2\xi = \sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{3} - 1} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \approx 1.6302$$

Ez egy kicsivel több, mint az egységnyi oldalú szabályos ötszög pontos átlóhossza.

Megállapíthajuk, hogy Dürer szerkesztése csak közelítőleg helyes; a relatív hibája mintegy háromnegyed százalék az átlóhosszúságokban, hiszen

$$\frac{2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{3} - 1} + \sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{5}} \approx 1.0075$$

Az öt átló közül ez a hiba csak egynél merül fel; a többi négy esetében is kiszámíthatjuk a hibát, de ott kisebb arányú eltérést fogunk tapasztalni. Dürer ötszögének az AB oldaltól legtávolabbi csúcsa $(0, t)$, ahol

$$t = \sqrt{1 - \xi^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} + \xi\right)^2}$$

Tehát az A-ból induló egyik átló hossza: $\sqrt{\frac{1}{4} + t^2} \approx 1.6081$. Az ugyaninnen induló másik átló hossza pedig

$$\sqrt{1 - \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \xi\right)^2} = \sqrt{1 - 2\xi} \approx 1.6218$$

A B-ből induló átlók nyilván ugyanekkorák. Mármost

$$\frac{1.6081}{1.6180} \approx 0.9939 = 1 - 0.0061 \quad ; \qquad \frac{1.6218}{1.6180} \approx 1.0023$$

Összegezve: Dürer öt átlója közül két darab körülbelül 0.61 százalékkal rövidebb a kelleténél, két darab körülbelül 0.23 százalékkal hosszabb a kelleténél, a leghossz-

abb átló pedig körülbelül 0.75 százalékkal hosszabb a kelleténél. Mindazonáltal

$$2 \cdot 0.61 - 2 \cdot 0.23 - 0.75 = 0.01$$

Ez azt jelenti, hogy az átlók átlaghosszúsága már majdnem tökéletes.

Fél évezreddel Dürer eredeti konstrukciója után adunk egy egyszerű ötletet a szerkesztés majdnem tökéletesre való feljavítására: Az első illetve a második körön megmaradva a J illetve H pontokat körülbelül hat-hat ezreddel közelebb kell vinni C ponthoz. Tehát pédául egy A2-es méretű razlapon 165 milliméteres oldalhosszúságból kiindulva körülbelül csak egy-egy milliméternyit kell változtatni a J és H pontok helyzetén.

Nem szabad elhallgatnunk, hogy a Dürer előtti évszázadokban már ismert volt a tökéletesen pontos eljárás a szabályos ötszög szerkesztésére. Dürer módszerének viszont két előnye is van. Egyrészt egyszerűbb, és gyorsabb, főleg akkor, ha az ötszög oldalhosszúsága van előre megadva, és nem a körülírt kör. Másik előny az,

hogy menet közben nem kell megváltoztatni a körző nyílását. Ha egy iskolákban használatos olcsó műanyag körzővel körzőnyílást változtat a tanuló, biztosra vehetjük, hogy egy százaléknál nagyobb pontatlanságok lesznek a megszerkesztett ábráján.

Hivatkozás

A. Dürer, Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt, Nürnberg, 1525.