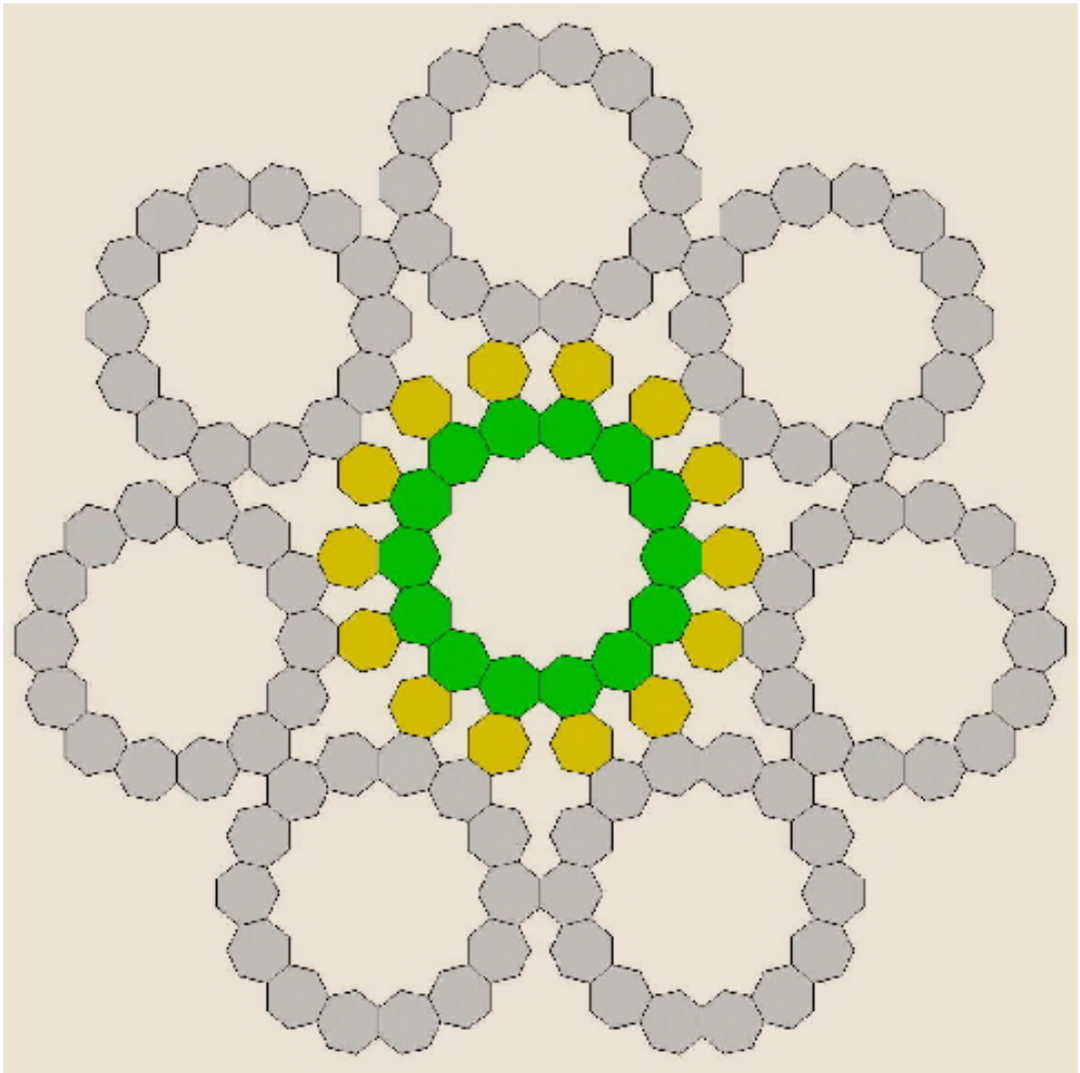
Haladvány Kiadvány 2023.12.13

Egybevágó szabályos hétszögek elhelyezésének titkáról

Hujter Mihály hujter.misi@gmail.com
Kabai Sándor unico.kabai@gmail.com

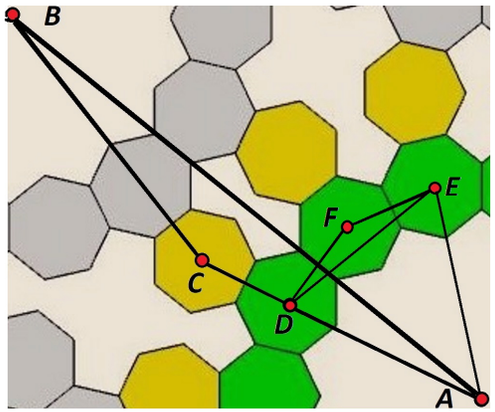
A jelen dolgozatban egybevágó szabályos hétszögeknek – mégpedig pontosan 126 darabnak – az első ábrán látható elrendezését vizsgáljuk. Az elrendezés az esztétikai értékén túl rejt egy matematikai titkot is. Ezt a titkot kívánjuk feltárni.

Először az ábra közepén látható 14 darab zöld szabályos 7-szöget (heptagont) tekintjük. Ezek mindegyike pontosan 2 másikkal határos at egyik oldaluk mentén. Az elhelyezést úgy kalibráljuk, hogy a legalsó 2 zöld heptagon közös oldala függőleges legyen. Ezután a 14 darab zöld heptagonból álló blokknak 7 különböző eltolt pédányát vesszük; ezek lesznek a szörke heptagonok. Az eredeti zöld



blokk középpontjától pontosan olyan távolságra toljuk el a szürke blokkokat, hogy az ábra szerint mindegyik szörke blokk két másikkal legyen szomszédos egy-egy heptagon-oldal mentén.Az könnyen látható, hogy a 14 darab zöld és a 98 darab szürke heptagon így valóban elrendezhető. A titok abban rejlik, hogy zöld és a szürke heptagonok közé az ábra szerinti módon éppen pontosan beékelhető a 14 darab sárga heptagon. Itt a lényef az, hogy nemcsak körülbelüli pontossággal, hanem teljes precizitással, saroktól sarokig akarjuk az illesztést.

A jelen dolgozat matematikai célja az, hogy bizonyítsük, ez a tökéletes pontosság megvalósítható. Célunk eléréséhez kragadjuk az első ábra egy részletét, és azt vizsgáljuk. Ez látható a második ábrán.Itt az A pont az eredeti nagy elrendezés középpontját jelenti, a B pont pedig a a zöld blokk egyik eltoltjának a középpontját. Most feltételezzük, hogy a sárga heptagonok pontosan saroktók sarokig illeszhetők. Az, hogy a szürke blokkok is pontosan heptagon-oldal mentén illeszkednek-e egymáshoz, később fog kiderülni. Az egyszerűbb tárgyalásmód érdekében jelölje ϑ a $\pi/14$ szöget, és legyen $c = \cos\vartheta$. Az AB szakaszhoz



legközelebbi sárga heptagonok közül az egyiknek a középpontját jelölje C. A két lehetőség közül azt válasszuk ki, melyre a $BAC\measuredangle$ pozitív. A C középpontú sárga heptagonnal szomszédos zöld heptagon középpontja legyen D. Ha az A pont körül a D pontot elforgatjuk az AB szakasz irányába 4ϑ szöggel, akkor kapjuk az E pontot, ha pedig fele akkora szöggel forgatjuk el, akkor az F pontot nyerjük. Nyilván az E és az F pont is egy-egy zöld heptagon középpontja.

Tekintsük egységnek az egybevágó heptagonok beírt körének sugarát. Tehát $CD = DF = FE = 2$. Mivel $EDF\measuredangle = FED\measuredangle = \vartheta$, ezért $DE = 4c$. Vegyük észre, hogy $EAD\measuredangle = 4\vartheta$ és $ADE\measuredangle = DEA\measuredangle = 5\vartheta$. Tehát a szinusztétel

miatt

$$AD = AE = AF = 4c \cdot \frac{\sin 5\vartheta}{\sin 4\vartheta}$$

A képleteink egyszerűsítése érdekében használni fogjuk az $t = \frac{\sin 5\vartheta}{\sin 4\vartheta}$ jelölést. Tehát $AD = AE = AF = 4cs$. Következésképpen $AC = BC = 2 + 4ct$.

A második ábráról az is leolvasható, hogy $AC = BC$ és az, hogy $BAC\measuredangle = \vartheta$. Tehát

$$AB = 2c\,(2 + 4ct) = 4c + 8c^2t$$

Most az A pont körül forgassuk el a B pontot negatív irányba 4ϑ szzöggel. A keletkezett pontot jelölje G. Vegyük észre, hogy az első ábrán látható szürke blokkok közül a legfelsőnek lesz G a középpontja. Mármost a DAE háromszög és a BAG háromszög hasonlók, és a hasonlóság aránya

$$\frac{AD}{AB} = \frac{4ct}{4c + 8c^2t} = \frac{t}{1 + 2ct}$$

Következésképpen

$$BG = \frac{1+2ct}{t} \cdot DE = \frac{1+2ct}{t} \cdot 4c = \frac{4c+8c^2t}{t} = \frac{4c}{t} + 8t^2$$

A CD szakasz felezőpontjának az A ponttól mért távolsága nyilván $1 + AD = 1+4ct$. Tehát annak, hogy a szürke blokkok valóban pontosan egy-egy heptagon-oldal mentén illeszkedjenek egymáshoz, az a feltétele, hogy a $BG = 2\cdot(1+4ct)$ egyenlőség teljesüljön. A kulcskérdés tehát az, hogy fennáll-e, hogy

$$\frac{4c}{t} + 8c^2 = 2 \cdot (1+4ct)$$

azaz

$$4ct = \sqrt{4t^4+1} + 2t^2 - 1$$

Dolgozatunk hátralévő részében ezt az azonosságot fogjuk bizonyítani.

Alkalmazni fogjuk a $q = \cos\frac{2\pi}{7}$ jelölést. Mármost

$$\begin{aligned}
\sin 4\vartheta &= \sin\frac{2\pi}{7} = 2\cdot\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\\
\sin 5\vartheta &= \sin\frac{5\pi}{14} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{14}\right) = \cos\frac{\pi}{7}\\
2t &= \frac{2\cdot\sin 5\vartheta}{\sin 4\vartheta} = \frac{2\cdot\cos\frac{\pi}{7}}{2\cdot\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}\\
4ct &= 2c\cdot 2t = \frac{2\cdot\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{2\left(3\sin\frac{\pi}{7}-4\sin^3\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\frac{\pi}{7}}\\
&= 6-8\sin^2\frac{\pi}{7} = 2+4(1-2\sin^2\frac{\pi}{7})\\
&= 2+4\cos\frac{2\pi}{7} = 2+4q
\end{aligned}$$

Továbbá

$$\begin{aligned} 2t^2-1 &= \frac{1}{2\sin^2\frac{\pi}{7}}-1=\frac{1-2\sin^2\frac{\pi}{7}}{2\sin^2\frac{\pi}{7}} \\ &= \frac{\cos\frac{2\pi}{7}}{2\sin^2\frac{\pi}{7}}=\frac{\cos\frac{2\pi}{7}}{1-\cos\frac{2\pi}{7}}=\frac{q}{1-q} \end{aligned}$$

Tehát azt kell belátnunk, hogy

$$\left(2+4q-\frac{q}{1-q}\right)^2=\frac{1}{(1-q)^2}+1$$

azaz hogy

$$8q^3-4q^2-4q-1=0 \qquad (*)$$

Mindazonáltal

$$\begin{aligned}
\cos\frac{6\pi}{7} &= \cos\left(3\cdot\frac{2\pi}{7}\right) = 4q^3 - 3q \\
\cos\frac{12\pi}{7} &= \cos\left(2\cdot\frac{6\pi}{7}\right) = 2\left(4q^3-3q\right)^2 - 1 = 32q^6 - 48q^4 + 18q^2 - 1 \\
\cos\frac{12\pi}{7} &= \cos\left(2\pi - \frac{12\pi}{7}\right) = \cos\frac{2\pi}{7} = q
\end{aligned}$$

Tehát

$$32q^6 - 48q^4 + 18q^2 - 1 - q = 0$$

azaz

$$(1-q)(1-2q-4q^2)\left(8q^3-4q^2-4q-1\right) = 0$$

Mivel $q \approx 0.6235$ és $1-2q-4q^2$ gyökei közelítőleg -0.809 és 0.309, ezért megkapjuk, hogy (*) teljesül.

Hivatkozások:

Hétszög – szócikk, Wikipédia.
https://hu.wikipedia.org/wiki/H%C3%A9tsz%C3%B6g

Trigonometrikus azonosságok – szócikk, Wikipédia.
https://hu.wikipedia.org/wiki/Trigonometrikus_azonoss%C3%A1gok