Haladvány Kiadvány 2024.01.10

Két azonosság az új esztendő köszöntésére

Hujter Mihály · hujter.misi@gmail.com

Az új esztendőt a következő két azonossággal köszöntjük. Mindkettőt bizonyítjuk.

$$2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 12 + \cdots + 2 \cdot 88 = 2024 \tag{1}$$

$$\frac{2}{\cos^2 4^\circ} + \frac{2}{\cos^2 8^\circ} + \frac{2}{\cos^2 12^\circ} + \cdots + \frac{2}{\cos^2 12^\circ} = 2024 \tag{2}$$

Az első azonosság a könnyebben bizonyítható. Már több, mint 500 éve *Magyarországi György mester* (*Georgius de Hungaria*) is megadta a receptet: Számtani haladványnál számítsuk ki a legnagyobb tag után következő tagot (ami már nincs a haladványban), abból vonjuk ki a haladvány legkisebb tagját, a különbséget osszuk el a haladvány közvetlenül egymásutáni tagjainak különbségével, és az eredményt még kettővel. Ami kijött, ez a haladvány tagjai darabszámának a fele; ezt szorozzuk meg a haladvány legkisebb és legnagyobb tagjának összegével; így kapjuk a haladvány összegét.

Esetünkben a haladvány legkisebb eleme $2 \cdot 4$, a legnagyobb $2 \cdot 88$, a közvetlenül egymásutáni elemek különbsége 8, tehát a haladvány elemei számának fele: $((2 \cdot 88 + 2 \cdot 4 - 8)/8)/2 = 11$. Valóban $11 \cdot (8 + 176) = 2024$.

A második azonosság bizonyítása már keményebb dió. Mivel $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, ezért (2) ekvivalens a következő azonossággal

$$\tan^2 4^\circ + \tan^2 8^\circ + \tan^2 12^\circ + \cdots + \tan^2 88^\circ = 990 \qquad (3)$$

Ez az azonosság a $k = 22$ értékválasztásnál speciális esete a következő azonosságnak, ahol $\vartheta = \frac{\pi}{2k+1}$:

$$\sum_{p=1}^{k} \tan^2(p\vartheta) = 2k^2 + k \tag{4}$$

Állítjuk, hogy ez az azonosság minden pozitív egész k-ra fennáll. Mivel jól ismert, hogy

$$\begin{aligned} \tan 60^\circ &= \sqrt{3} \\ \tan 36^\circ &= \sqrt{5 - \sqrt{20}} \\ 2\tan 12^\circ &= \sqrt{27} - \sqrt{15} - \sqrt{50 - \sqrt{2420}} \end{aligned}$$

ezért a $k = 1, 2$ és 7 esetekben a (4) könnyen igazolható a tangensre vonatkozó addíciós képletekkel. Jól ismert következő polinomazonosság is:

$$64\left(z - \cos^2\frac{\pi}{7}\right)\left(z - \cos^2\frac{2\pi}{7}\right)\left(z - \cos^2\frac{3\pi}{7}\right) = 64z^3 - 80z^2 + 14z - 1$$

Ennek alapján a $k = 3$ esetben is bizonyítható (4).

Külön figyelmet érdemel még a $k = 4$ eset is; ekkor (4) ezt állítja:

$$\tan^2 20^\circ + \tan^2 40^\circ + \tan^2 60^\circ + \tan^2 80^\circ = 36$$

Mivel $\tan^2 60^\circ = 3$, ezért a

$$\tan 80^\circ = \sqrt{33 - \tan^2 20^\circ - \tan^2 40^\circ}$$

azonosságot nyerjük, mint ekvivalens egyenlőséget. Ha $t = \tan 10^\circ$, akkor $\tan 80^\circ = \frac{1}{t}$, $\tan 20^\circ = \frac{2t}{1-t^2}$ és

$$\tan 40^\circ = \frac{2\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)}{1 - \left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2} = \frac{4t(1-t^2)}{(t^2-2t-1)(t^2+2t-1)}$$

Mindazonáltal (4) jelentése a $k = 4$ esetben ez:

$$\frac{1}{t^2} = 33 - \left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2 - \left(\frac{4t(1-t^2)}{(t^2-2t-1)(t^2+2t-1)}\right)^2$$

azaz

$$\left(1-33t^2+27t^4-3t^6\right)\left(1-14t^2+56t^4-62t^6+11t^8\right)=0$$

Mivel

$$1-14t^2+56t^4-62t^6+11t^8\approx 0.617$$

azért arra jutottunk, hogy a $k=4$ esetben (4) ekvivalens ezzel:

$$1-33t^2+27t^4-3t^6=0$$

Ha ezen utóbbi azonosságot akarjuk igazolni, akkor

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\cdot\tan y}$$

alapján

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan(10^\circ+20^\circ)=\frac{t+\frac{2t}{1-t^2}}{1-t\cdot\frac{2t}{1-t^2}}=\frac{3t-t^3}{1-3t^2}$$

Ebből

$$1 - \sqrt{27}t - 3t^2 + \sqrt{3}t^3 = 0$$

Mármost

$$\begin{aligned} & (1 - \sqrt{27}t - 3t^2 + \sqrt{3}t^3)(1 + \sqrt{27}t - 3t^2 - \sqrt{3}t^3) \\ = \;& 1 - 33t^2 + 27t^4 - 3t^6 \end{aligned}$$

révén leszünk készen.

Laczkovich Miklós professzor felhívta a figyelmünket egy érdekes függvényazonosságra: Pozitív egész n-re és komplex z-re fennáll, hogy

$$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{\cos^2(z + \frac{p\pi}{n})} = \frac{n^2}{\sin^2\left(nz + \frac{n\pi}{2}\right)}$$

Mindkét oldal olyan *meromorf* függvény, ami $\frac{\pi}{n}$ szerint periodikus, és ugyanott vannak a *pólusai* azonos *reziduumokkal*. Ha most ebbe a képletbe z helyére 0-t,

n helyére $2k+1$-et írunk, akkor $\cos 0 = 1$, $\sin \frac{(2k+1)\pi}{2} = +1$ vagy -1 és

$$\cos \frac{p\pi}{2k+1} = -\cos\left(\pi - \frac{p\pi}{2k+1}\right)$$

miatt azt kapjuk, hogy

$$\sum_{p=0}^{k} \frac{1}{\cos^2 \frac{p\pi}{2k+1}} = \frac{(2k+1)^2 - 1}{2} = 2k^2 + 2k$$

Mármost ez nyilvánvalóan ekvivalens a (4) azonossággal.

Nem kívánjuk bonyolult komplex analízissel terhelni a olvasót, ezért csak közismert trigonometrikus azonosságokkal bizonyítjuk majd a (3) azonosságot. A bizonyításunk mintájára (4) is igazolható.

Mindenekelőtt állítjuk a következőket:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin 2^\circ} &= 1 + 2\left(\cos 4^\circ + \cos 8^\circ + \cdots + \cos 88^\circ\right) \\
\frac{-1}{\sin 6^\circ} &= 1 + 2\left(\cos 12^\circ + \cos 24^\circ + \cdots + \cos 264^\circ\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin 10^\circ} &= 1 + 2\left(\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cdots + \cos 440^\circ\right) \\
\frac{-1}{\sin 14^\circ} &= 1 + 2\left(\cos 28^\circ + \cos 56^\circ + \cdots + \cos 616^\circ\right)
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin 82^\circ} &= 1 + 2\left(\cos 164^\circ + \cos 328^\circ + \cdots + \cos 3608^\circ\right) \\
\frac{-1}{\sin 86^\circ} &= 1 + 2\left(\cos 172^\circ + \cos 344^\circ + \cdots + \cos 3784^\circ\right)
\end{aligned}$$

A fenti azonosságok teljes teljes általánosságban $k = 1, 2, \cdots, 22$ esetén a

következőképpen írhatók:

$$\frac{(-1)^{k-1}}{\sin\frac{(2k-1)\pi}{90}} = 1 + 2\sum_{p=1}^{22}\cos\frac{p(2k-1)\pi}{45} \tag{5}$$

Az (5) egyenlőség bizonyítása céljából vezessük be az

$$\varepsilon_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{45} + i\sin\frac{(2k-1)\pi}{45}$$

és az

$$s_k = \sin\frac{(2k-1)\pi}{90}$$

jelöléseket. Itt ε_1 helyett az egyszerűség kedvéért csak azt írjuk, hogy ε. Nyilván $\varepsilon_k^{45} = \cos(2k-1)\pi = -1$, továbbá egyrészt $\varepsilon_k = \varepsilon^{2k-1}$, másrészt $p = 1, 2, \cdots, 22$ esetén $\varepsilon_k^{-p} = -\varepsilon_k^{45-p}$. Vegyük észre azt is, hogy

$$\varepsilon_k + \varepsilon_k^{-1} = 2\cos\frac{(2k-1)\pi}{45} = 2(1-2s_k^2) = 2 - 4s_k^2$$

Vegyük észre továbbá, hogy $p = 1, 2, \cdots, 22$ esetén

$$\frac{\varepsilon_k^p + \varepsilon_k^{-p}}{2} = \cos\frac{p(2k-1)\pi}{45}$$

Mármost (5) jobb oldala ez:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_k^{-22} + \varepsilon_k^{-21} + \cdots + \varepsilon_k^{21} + \varepsilon_k^{22} \\
= \;& \varepsilon_k^{-22}\left(1 + \varepsilon_k + \varepsilon_k^2 + \cdots + \varepsilon_k^{44}\right) \\
= \;& \varepsilon_k^{-22} \cdot \frac{1 - \varepsilon_k^{45}}{1 - \varepsilon_k} = \varepsilon_k^{-22} \cdot \frac{1 - (-1)}{1 - \varepsilon_k} = \frac{2\varepsilon_k^{-22}}{1 - \varepsilon_k} \\
= \;& \frac{2\varepsilon_k^{-22}}{1 - \varepsilon_k} \cdot \frac{\varepsilon_k^{-1} + \varepsilon_k^{45}}{\varepsilon_k^{-1} - 1} \\
= \;& \frac{2\varepsilon_k^{-23} + 2\varepsilon_k^{23}}{\varepsilon_k + \varepsilon_k^{-1} - 2} = \frac{2\varepsilon_k^{-23} + 2\varepsilon_k^{23}}{-4s_k^2} = \frac{\varepsilon_k^{22} + \varepsilon_k^{-22}}{2s_k^2}
\end{aligned}$$

Itt

$$\frac{\varepsilon_k^{22}+\varepsilon_k^{-22}}{2}=\cos\frac{22(2k-1)\pi}{45}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{22(2k-1)\pi}{45}\right)$$

$$=\quad \sin\frac{(88k-89)\,\pi}{90}=\sin\frac{((90k-90)-(2k-1))\,\pi}{90}$$

$$=\quad -\sin\left(\frac{(2k-1)}{90}-(k-1)\pi\right)=(-1)^{k-1}s_k$$

Ezzel (5) bizonyítása befejeződött.

Most rátérünk (3) bizonyítására. Bevezetjük a $c_k^{(p)}=\varepsilon_k^p+\varepsilon_k^{-p}$ és $C_k=\sum_{p=0}^{22}c_k^{(p)}$ jelöléseket $p=0,1,\cdots,22$ és $k=1,2,\cdots,22$ esetére. Nyilván $c_k^{(0)}=2$. Mármost (5) következtében

$$\frac{1}{\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{90}}-1=(C_k-1)^2-1=C_k^2-2C_k$$

Mivel

$$\frac{\pi}{2} - \frac{(2k-1)\pi}{90} = \frac{(23-k)\,\pi}{45}$$

ezért

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{90}} - 1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{(23-k)\pi}{45}} - 1 = \tan^2 \frac{(23-k)\,\pi}{45}$$

Tehát a fentiek szerint azt elegendő bizonyítanunk, hogy

$$\sum_{k=1}^{22} (C_k^2 - 2C_k) = 990$$

Elegendő lesz megmutatnunk, hogy $\sum_{k=1}^{22} C_k = 44$ és hogy $\sum_{k=1}^{22} C_k^2 = 1078$.

$$\sum_{k=1}^{22} C_k = \sum_{k=1}^{22} \sum_{p=0}^{22} \left(\varepsilon^{p(2k-1)} + \varepsilon^{-p(2k-1)}\right) = \sum_{p=0}^{22} \sum_{k=1}^{22} \left(\varepsilon^{p(2k-1)} + \varepsilon^{-p(2k-1)}\right)$$

Itt $z \notin \{-1, 1\}$ esetén $\sum_{k=1}^{22} z^{2k-1} = \frac{z^{45}-z}{z^2-1}$ és $\varepsilon^{45} = -1$ miatt $p \neq 0$ esetén

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{22} \left(\varepsilon^{p(2k-1)} + \varepsilon^{-p(2k-1)}\right) \\
= & \frac{(\varepsilon^p)^{45} - (\varepsilon^p)}{(\varepsilon^p)^2 - 1} + \frac{(\varepsilon^{-p})^{45} - (\varepsilon^{-p})}{(\varepsilon^{-p})^2 - 1} \\
= & \frac{(-1)^p - (\varepsilon^p)}{(\varepsilon^p)^2 - 1} + \frac{(-1)^p - (\varepsilon^{-p})}{(\varepsilon^{-p})^2 - 1} \\
= & (-1)^{p+1}
\end{aligned}$$

Tehát

$$\sum_{k=1}^{22} C_k = \sum_{k=1}^{22} (\varepsilon^0 + \varepsilon^0) = 44$$

Most $k = 1, 2, \cdots, 22$ és $p = -1, -2, \cdots, -22$ esetére vezessük be a $c_k^{(p)} =$

$c_k^{(-p)}$ jelölést. Vegyük észre, hogy tetszőleges

$$u, v \in \{-22, -21, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, 21, 22\}$$

esetére fennáll, hogy

$$\begin{aligned} c_k^{(u)} \cdot c_k^{(v)} &= \left(\varepsilon_k^u + \varepsilon_k^{-u}\right)\left(\varepsilon_k^v + \varepsilon_k^{-v}\right) \\ &= \varepsilon_k^{u+v} + \varepsilon_k^{-u-v} + \varepsilon_k^{u-v} + \varepsilon_k^{-u+v} \\ &= c_k^{(u+v)} + c_k^{(u-v)} \end{aligned}$$

Ezért $H = \{0, 1, \cdots, 22\}$ esetén

$$\begin{aligned} C_k^2 &= \left(\sum_{u=0}^{22} c_k^{(u)}\right)\left(\sum_{v=0}^{22} c_k^{(v)}\right) = \sum_{u,v \in H}\left(c_k^{(u+v)} + c_k^{(u-v)}\right) \\ &= \sum_{u,v \in H}\left(\varepsilon_k^{u+v} + \varepsilon_k^{-u-v} + \varepsilon_k^{u-v} + \varepsilon_k^{v-u}\right) \end{aligned}$$

Itt

$$\begin{aligned}\sum_{u,v\in H}\varepsilon_k^{u+v} &= \sum_{p=0}^{44}\sum_{u+v=p}\varepsilon_k^p = \sum_{p=0}^{44}\left(\varepsilon_k^p\cdot\sum_{u+v=p}1\right)\\ &= \sum_{p=0}^{22}\left(\varepsilon_k^p\cdot\sum_{u+v=p}1\right)+\sum_{p=23}^{44}\left(\varepsilon_k^p\cdot\sum_{u+v=p}1\right)\\ &= \sum_{p=0}^{22}(p+1)\varepsilon_k^p+\sum_{p=23}^{44}(45-p)\,\varepsilon_k^p\end{aligned}$$

Mármost $p=23,24,\cdots,45$ esetén $\varepsilon_k^p=-\varepsilon_k^{p-45}$ miatt

$$\begin{aligned}\sum_{u,v\in H}\varepsilon_k^{u+v} &= \sum_{p=0}^{22}(p+1)\varepsilon_k^p-\sum_{p=23}^{44}(45-p)\,\varepsilon_k^{p-45}\\ &= 1+\sum_{p=1}^{22}(p+1)\varepsilon_k^p-\sum_{q=1}^{22}q\varepsilon_k^{-q}\end{aligned}$$

Hasonlóképpen

$$\sum_{u,v\in H} \varepsilon_k^{-u-v} = 1 + \sum_{p=1}^{22} (p+1)\varepsilon_k^{-p} - \sum_{q=1}^{22} q\varepsilon_k^{q}$$

Továbbá

$$\begin{aligned}
\sum_{u,v\in H} \varepsilon_k^{u-v} &= \sum_{u,v\in H} \varepsilon_k^{-u+v} \\
&= \sum_{p=0}^{22} (23-p)\varepsilon_k^{p} + \sum_{q=0}^{22} (23-q)\varepsilon_k^{-q} \\
&= 46 + \sum_{p=1}^{22} (23-p)\varepsilon_k^{p} + \sum_{q=1}^{22} (23-q)\varepsilon_k^{-q}
\end{aligned}$$

Mindazonáltal megkaptuk,hogy C_k^2 az ε_k^{-22}, ε_k^{-21}, $\cdots$, ε_k^{-1}, $\varepsilon_k^{0} = 1$, ε_k^{1}, $\cdots$, ε_k^{21}, ε_k^{22} olyan egészegyütthatós kombinációja, ahol $\varepsilon_k^{0} = 1$ együtthatója $1+1+$

$46 = 48$, továbbá $p = 1, 2, \cdots, 22$ esetén ε_k^p és ε_k^{-p} együtthatója egyformán $(p+1) + (-p) + 2 \cdot (23 - p) = 47 - 2p$. Következésképpen

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{22} C_k^2 &= 22 \cdot 48 + \sum_{k=1}^{22} \sum_{p=1}^{22} (47 - 2p) \left(\varepsilon_k^p + \varepsilon_k^{-p} \right) \\
&= 1056 + \sum_{p=1}^{22} \left((47 - 2p) \sum_{k=1}^{22} \left(\varepsilon_k^p + \varepsilon_k^{-p} \right) \right) \\
&= 1056 + \sum_{p=1}^{22} (47 - 2p) \, (-1)^{p+1} \\
&= 1078
\end{aligned}$$

Végezetül megemlítjük, hogy az imént bizonyított (3) azonosság így is írható:

$$\frac{1}{1 - \cos 4^\circ} + \frac{1}{1 - \cos 12^\circ} + \frac{1}{1 - \cos 20^\circ} + \cdots + \frac{1}{1 - \cos 164^\circ} + \frac{1}{1 - \cos 172^\circ} = 506$$

hiszen $k = 1, 2, \cdots, 22$ esetén

$$\begin{aligned}
\frac{2}{1-\cos(180^\circ - k\cdot 8^\circ)} &= \frac{2}{1-\cos(2\cdot(90^\circ - k\cdot 4^\circ))} \\
&= \frac{2}{1-1+2\sin^2(90^\circ - k\cdot 4^\circ)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(k\cdot 4^\circ)} = 1+\tan^2(k\cdot 4^\circ)
\end{aligned}$$