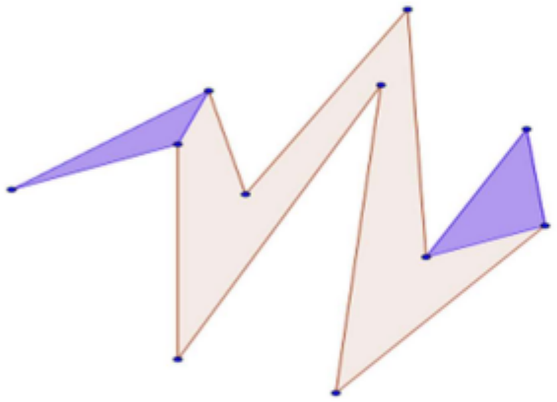
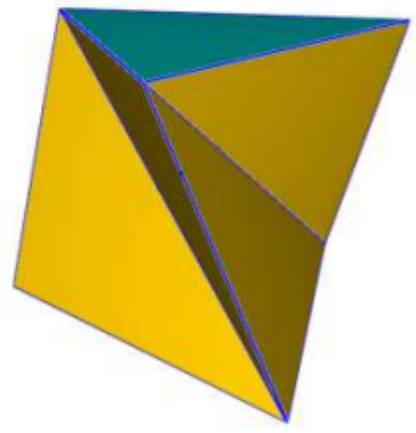
Tetraéderekre bontható-e a Császár-poliéder?

Szilassi Lajos
Szeged, Magyarország

Bármely egyszerű sokszög háromszögekre bontható úgy, hogy e háromszögek csúcsai a sokszög csúcsai. Ugyanis belátható, hogy bármely egyszerű sokszögnek van legalább két levágható háromszöge.



Ennek a műveletnek a térbeli megfelelője nem igaz. Vannak olyan poliéder testek, amelyek nem bonthatók ugyanígy tetraéderekre. Ezek közül a legegyszerűbb a Schönhart poliéder [1], amely lényegében egy konkáv oktaéder.



Császár Ákos igazolta [2], hogy a tóruszra rajzolt teljes gráf közönséges (önátmetszés nélküli) poliéderként is realizálható.

Nevezzünk két poliédert *ránézésre azonos*nak, ha kombinatorikus szerkezetük megegyezik, továbbá az egymásnak megfelelő csúcsoknak ill. a lapjaik síkjainak a *folytonos mozgatásával* egyik átvihető a másikba, vagy annak egy síkra vonatkozó tükörképébe anélkül, hogy eközben a sokszög bármely lapja, vagy maga a felület önátmetszővé válna. Két poliéder *ránézésre különböző*, ha az itt leírt transzformáció csak úgy állhat elő, hogy közben önátmetsző lapok, ill. felület keletkezzen.

1986-ban – meglepő módon – a Császár poliédernek egy ránézésre különböző változatát sikerült megtalálni.[2]

1991-ben J. Bokowski és A. Eggert megmutatta, hogy a Császár poliédernek négy, *ránézésre különböző* változata van, több nem lehetséges.[3]. Az így kapott négy poliéder mindegyikének van tengelyesen szimmetrikus változata.

Ezt követően vetődött fel az a kérdés, hogy ezek a poliéder testek felbonthatók-e tetraéderekre úgy, hogy a kapott tetraéderek csúcsai a hét adott csúcs közül kerüljenek ki. Mivel a poliéder bármely két csúcsát él köti össze, ezért csak olyan tetraéderek alkothatják a felbontást, amelyeknek pontosan két lapja tartozik a poliéder felülethez. A másik kettővel egy-egy szomszédos tetraéderhez csatlakoznak Az így kapott elvágó lapok mindegyikének pontosan két másik elvágó lappal van közös élük, ezért ezeknek együtt egy folytonos zárt háromszögláncot alkotnak.. Együtt ezek alkotják a felbontás *elvágó felületét*.

E vizsgálat során kiderült, hogy mind a négy esetben lehetséges a poliéder test tetraéderekre bontása, de csak egyféleképpen. A tetraéderek eltávolításának a sorrendje egyértelműen meghatározott, a mozgások iránya is korlátozott, ha el akarjuk kerülni a tetraéderek (fizikai) ütközését.

A felbontás során keletkezett elvágó felület minden esetben egy Möbius szalag. A hét csúcsú teljes gráf, így a Császár poliéder élhálózata is három Hamilton kört alkot. Ezek egyike az elvágó felület határvonala, másik a háromszöglánc egymáshoz csatlakozó lapjainak az élrendszere.

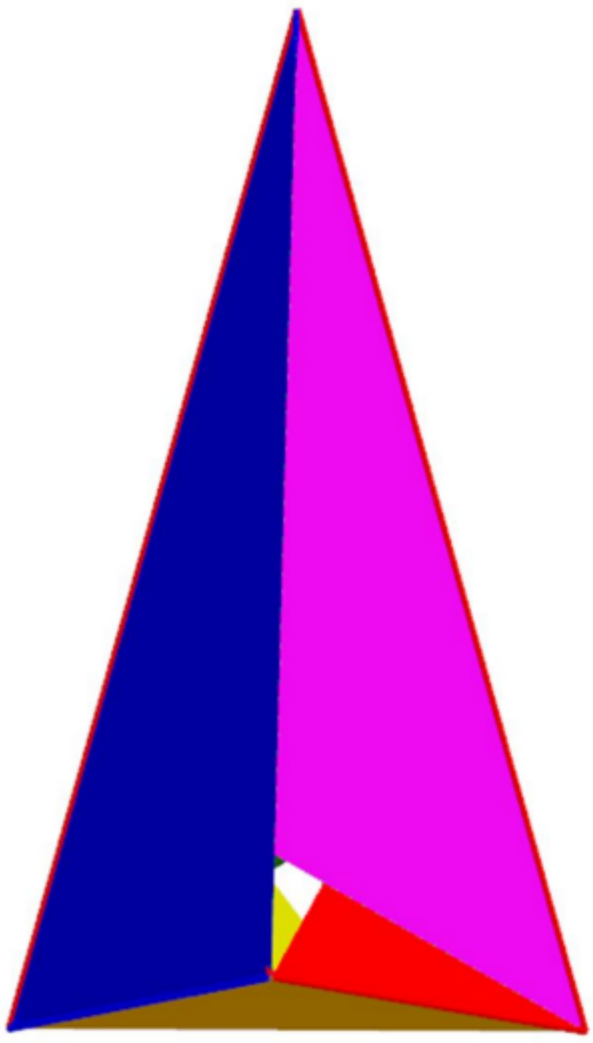
Megjegyezzük még, hogy az élhálózat három Hamilton-köre közül minden esetben pontosan egy csomót alkot. Erre - személyes kommunikáció kapcsán -John Conway hívta fel a figyelmünket, emlékeztetve arra a tételére, miszerint ha egy tórusz felületre olan zárt vonalat illesztünk, amely p-szer kerüli meg a tórusz vezérkörét, q-szor a forgástengelyét, ahol $p>1$,$q>1$ és $(p,q)=1$, akkor ez a vonal egy egyszerű csomót alkot.

Irodalom:

1. Schönhardt, E. (1928), *Über die Zerlegung von Dreieckspolyedern in tetraeder", Mathematische Annalen,* 98: 309–312 (1928)
2. Császár, Á.: *A polyhedron without diagonals*. Acta Sci. Math. (Szeged) **13**, 140–142 (1949-50)
3. Szilassi,L.: *Regular Toroids*. Structural Topology 13. 69-80,(1986)
4. Bokowsi J., Eggert A.: *All Realzatons of Möbius' Torus with 7 Vertices.* Structural Topology 17. 59-76 (1991)

https://www.geogebra.org/m/b6qqahy2

Császár Ákos, 1949.

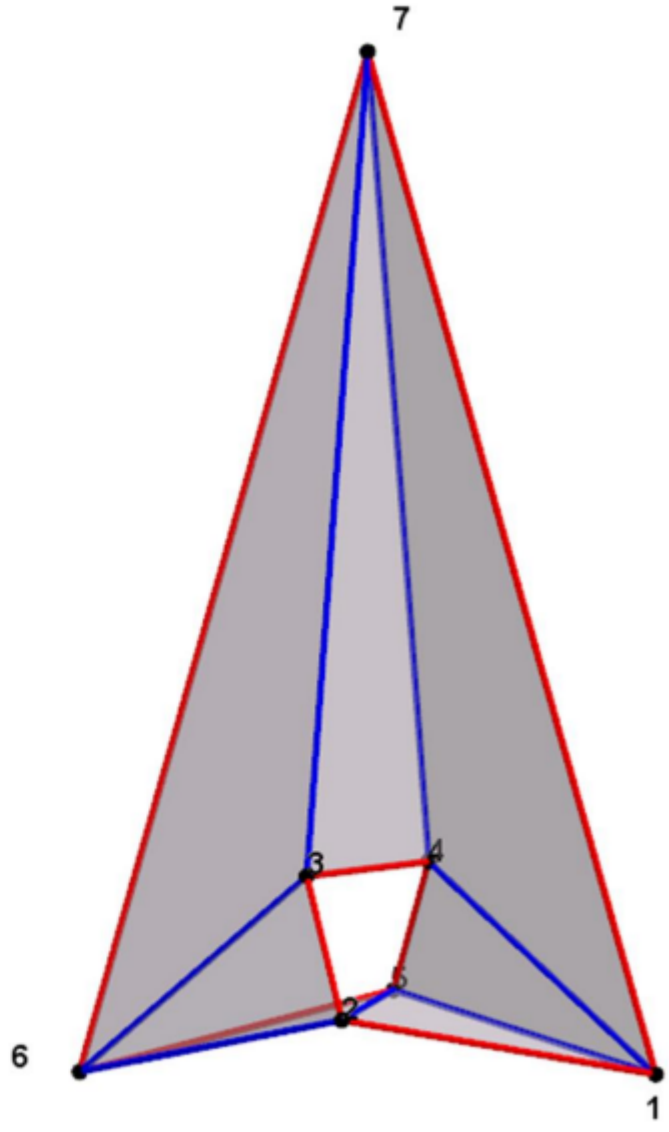


Hamilton körök:

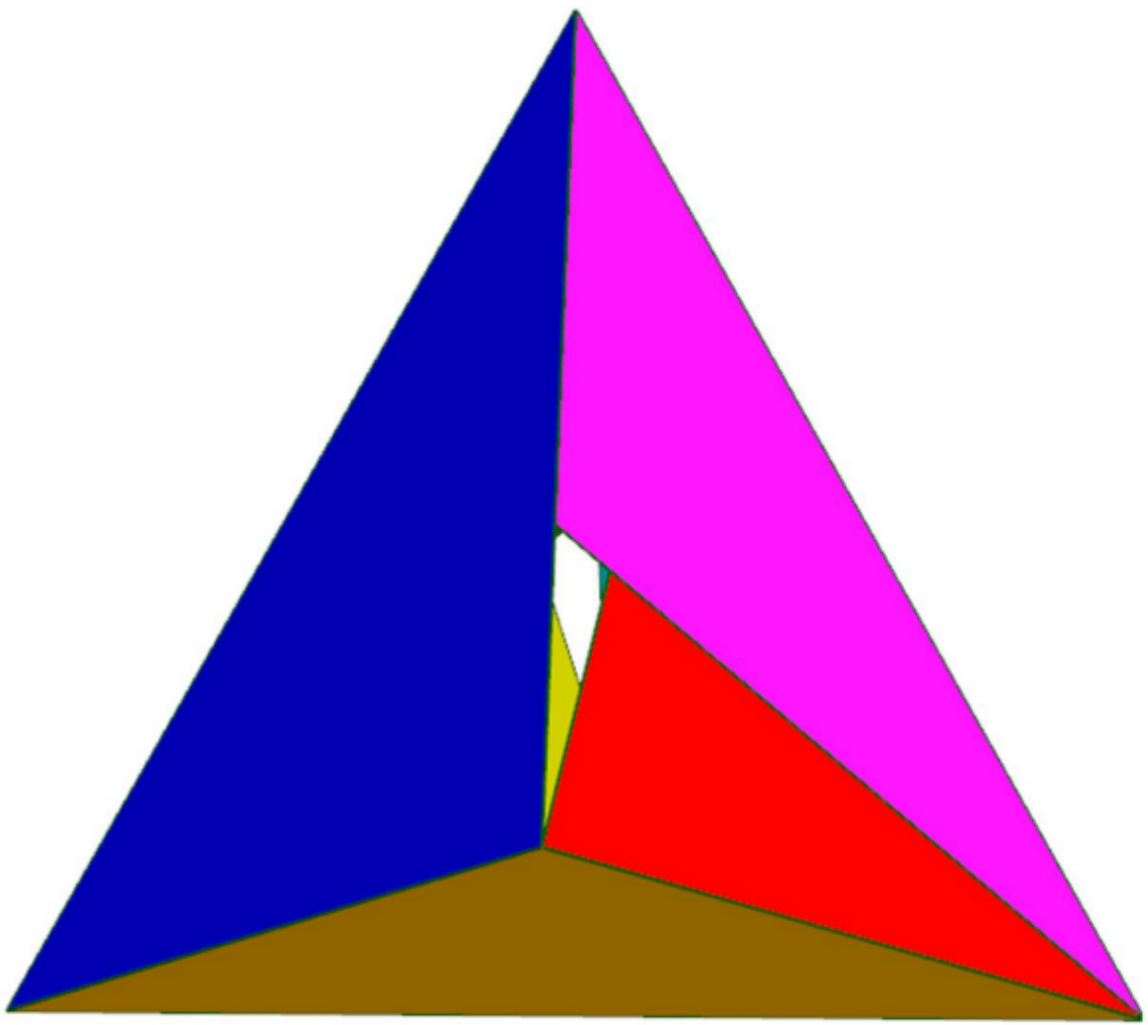
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

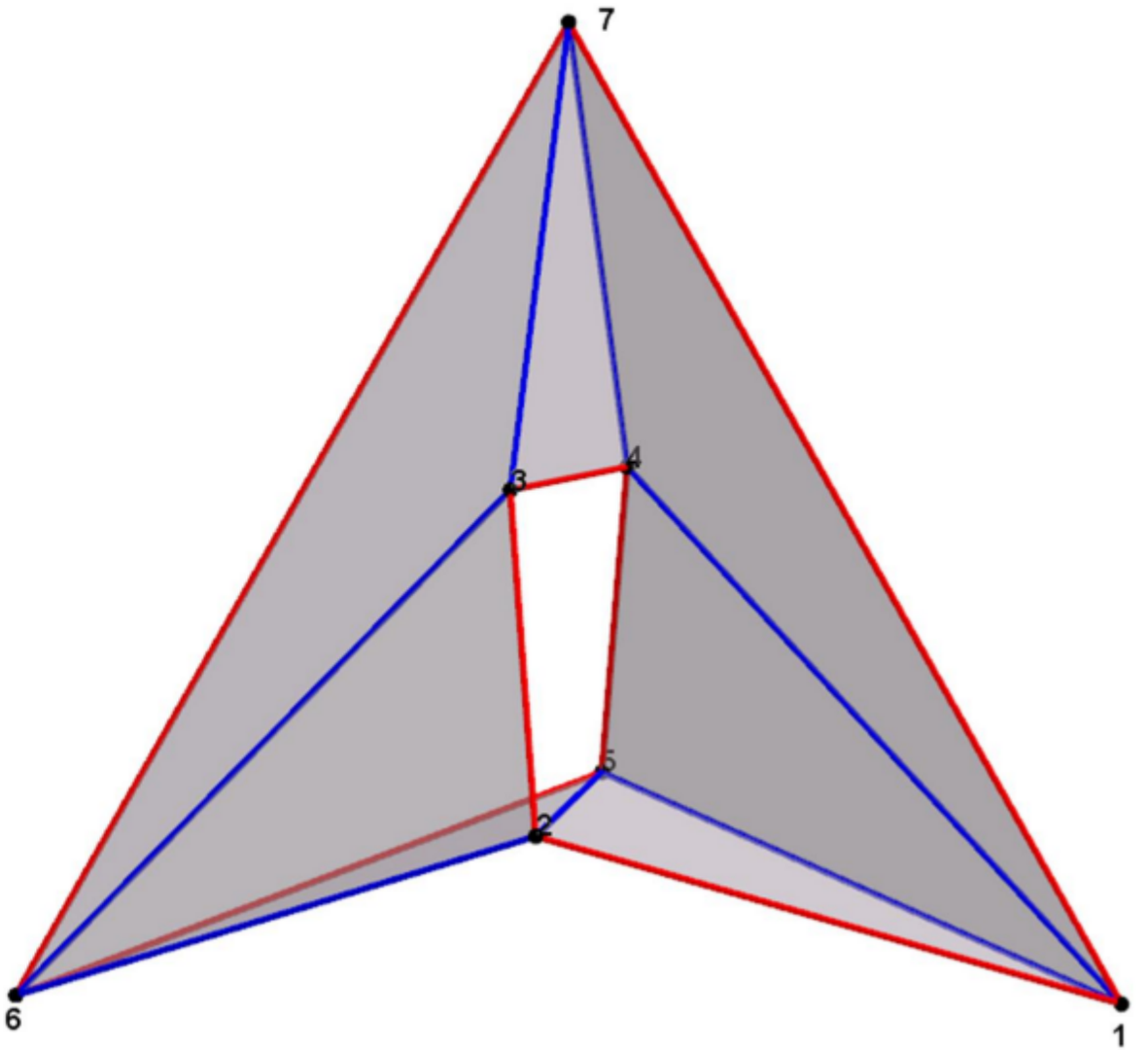
1, 3, 5, 7, 2, 4, 6.

1, 4, 7, 3, 6, 2, 5.

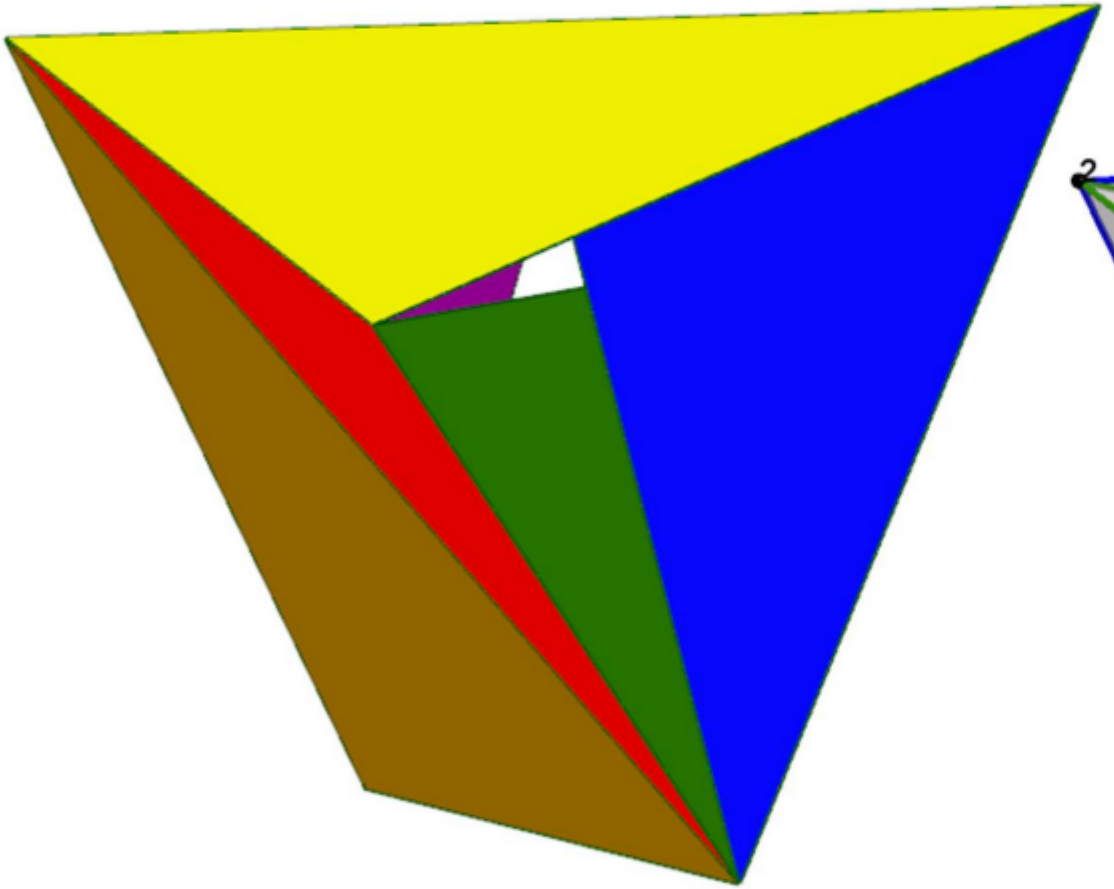


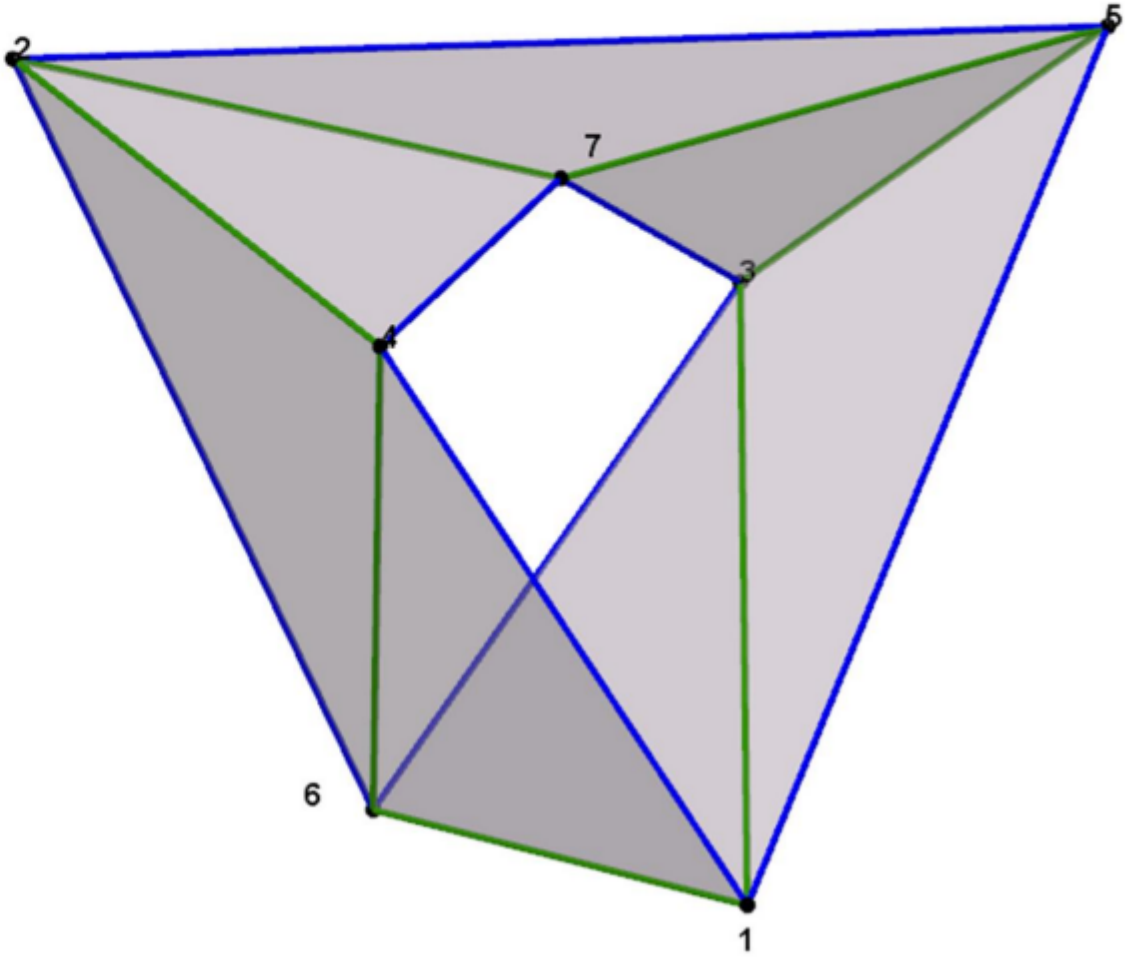
Szilassi Lajos, 1986.



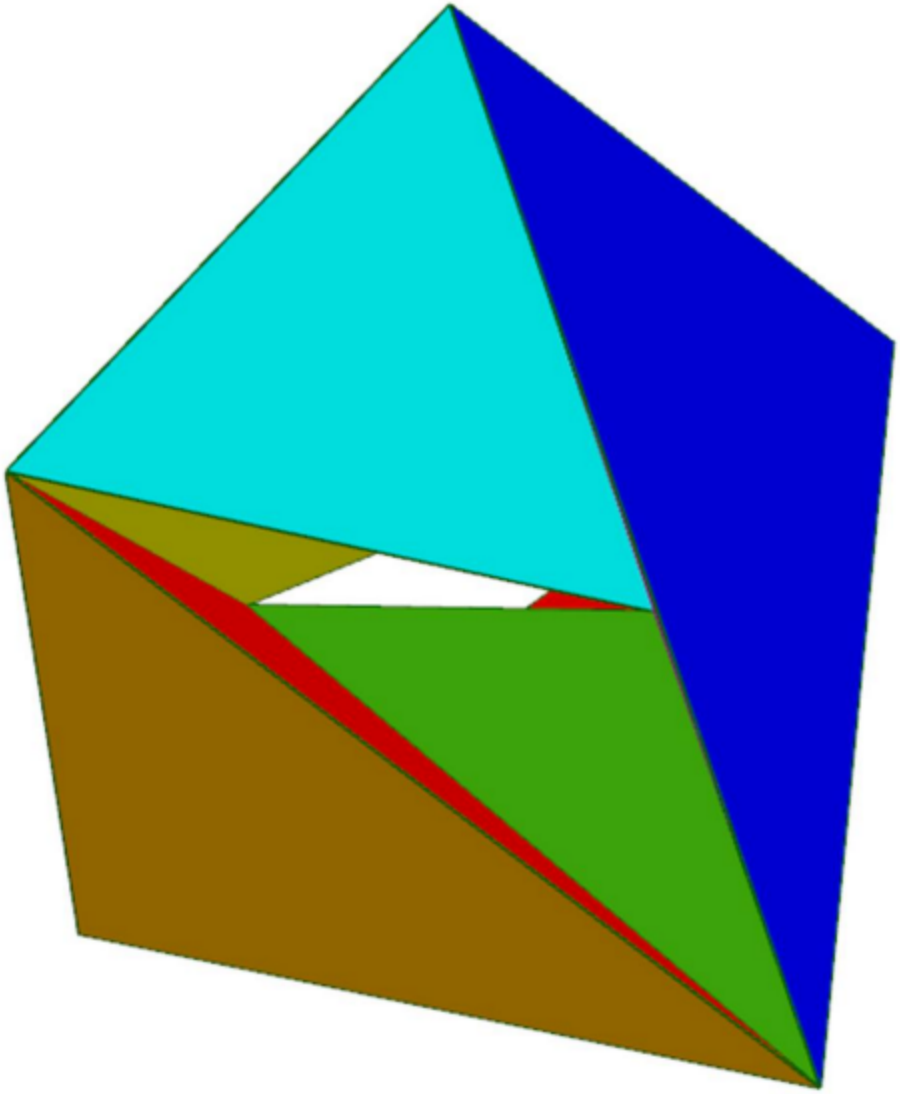


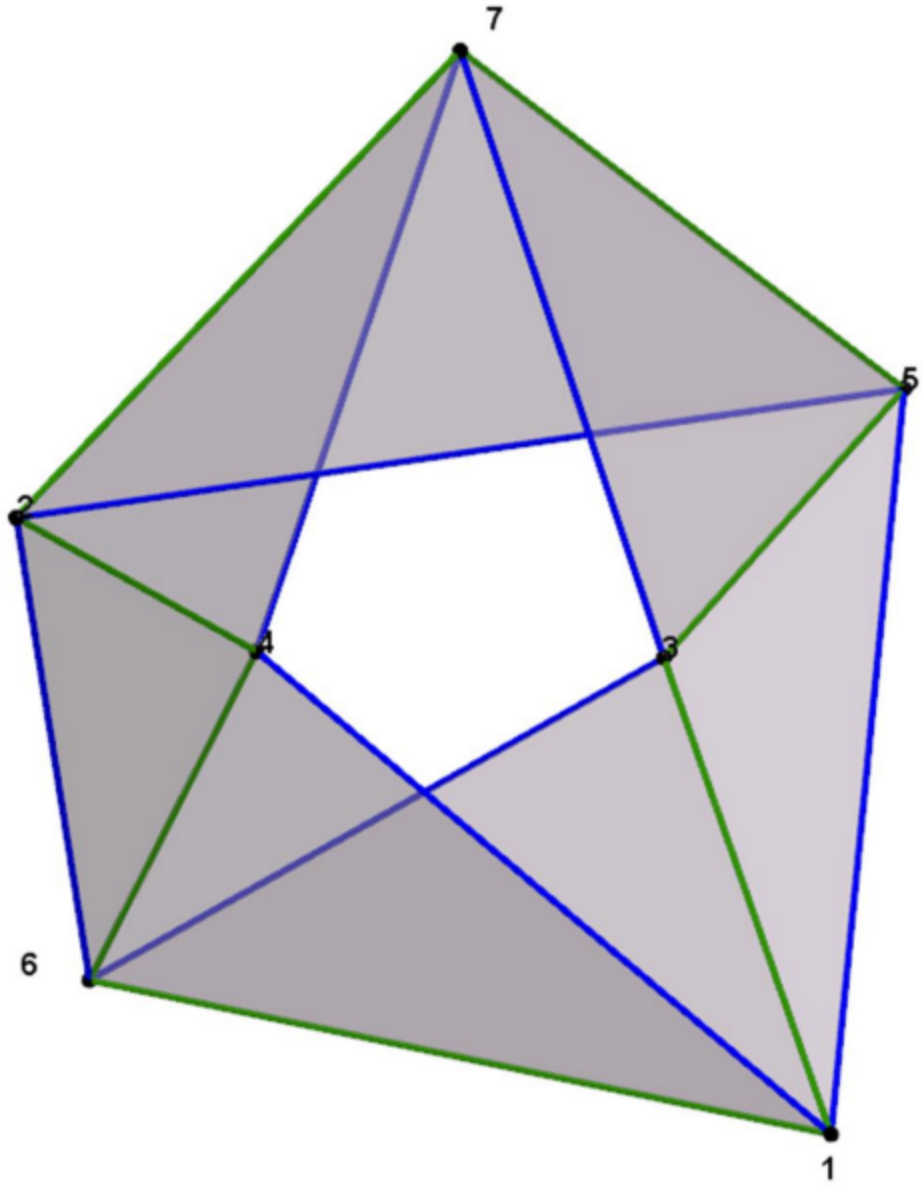
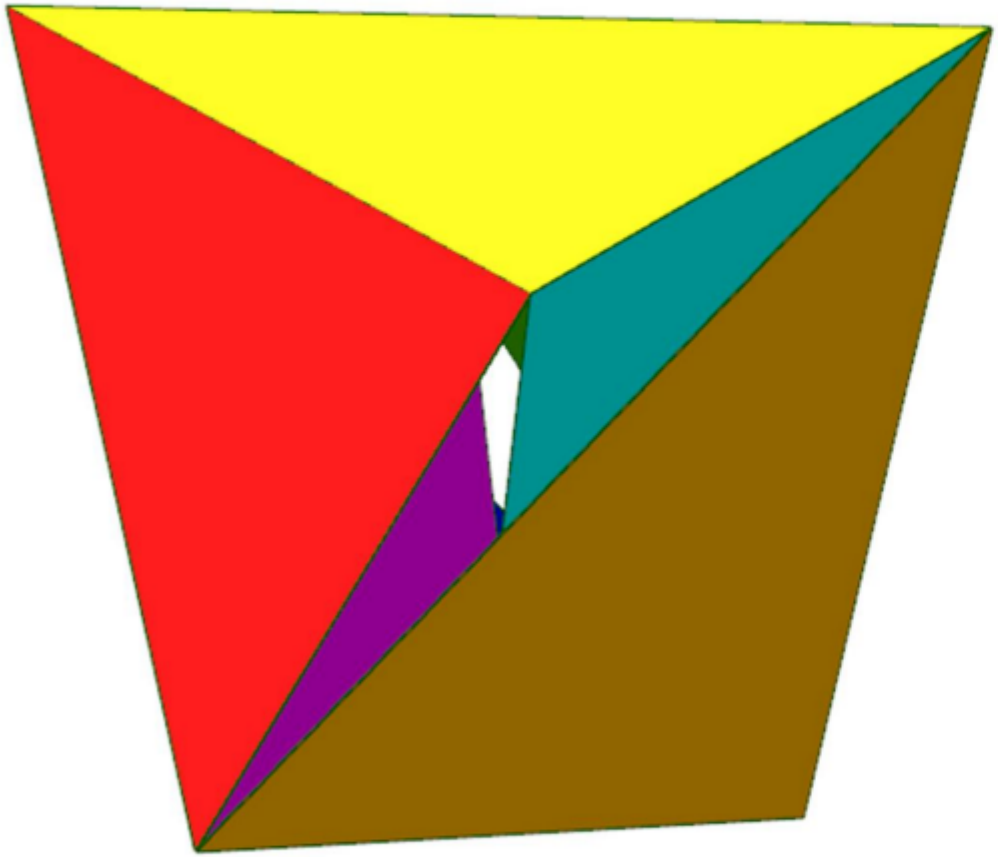
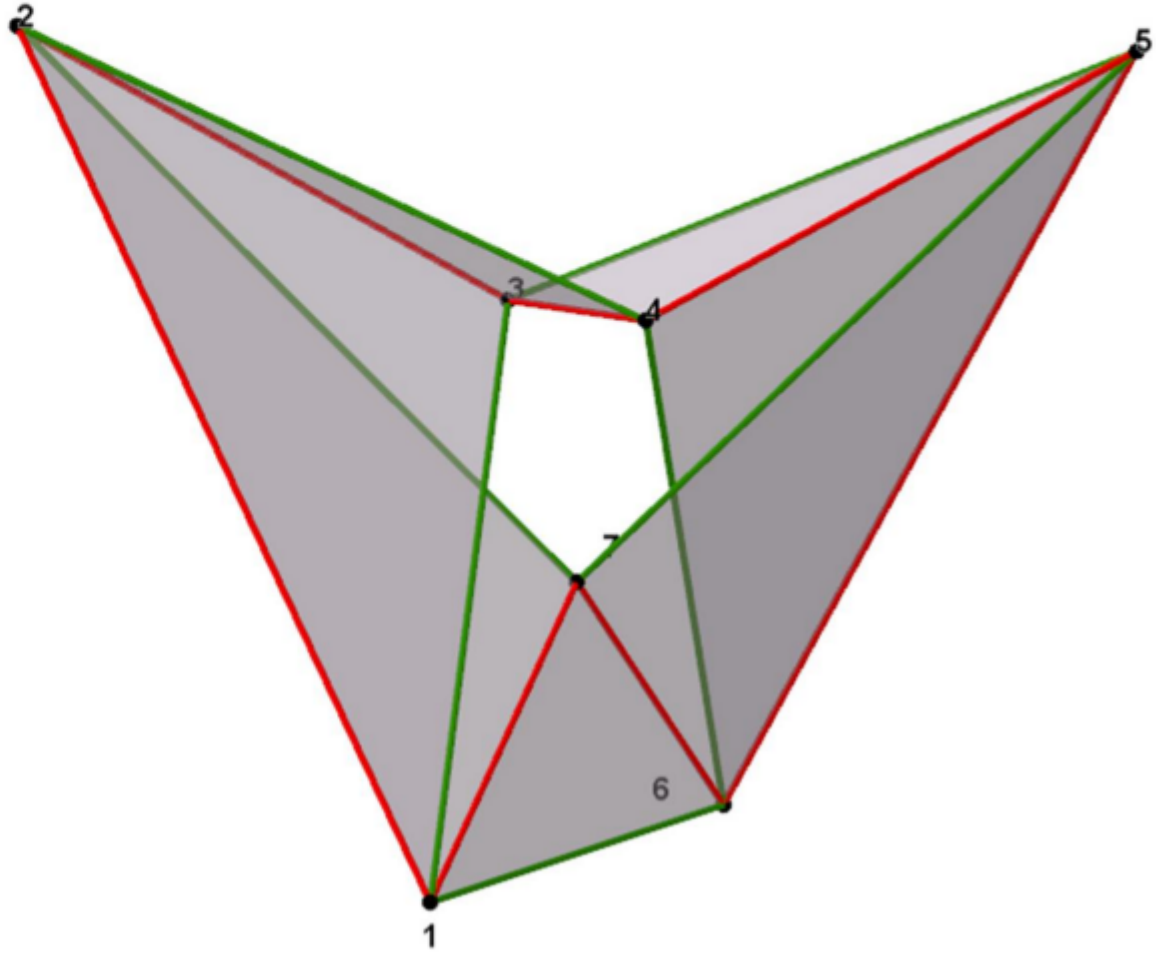
Szilassi Lajos, 1986.





Jürgen Bokowski, 1991.





Jürgen Bokowski, 1991.