Haladvány Kiadvány 2024-03-10

A Morley-háromszög helyzetéről

Hujter Mihály

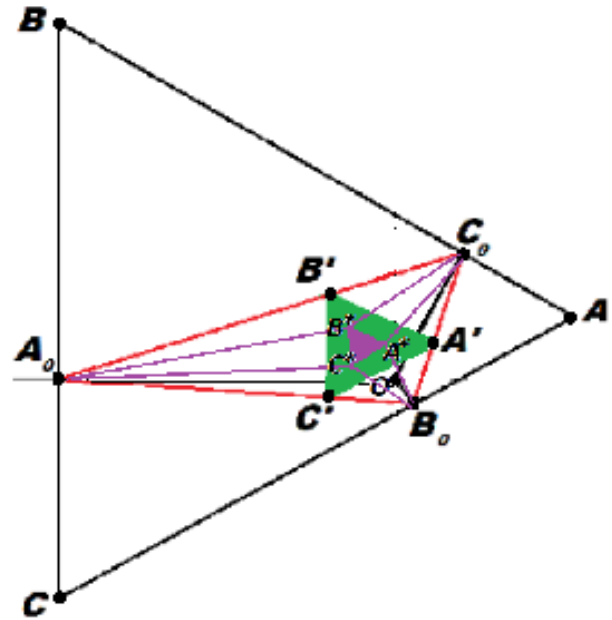
hujter.misi@gmail.com

Ajánlás. Ajánljuk ezt az írást Hajdu Endre tiszteletére közelgő kilencvenegyedik születésnapja alkalmából.

Tartalmi összefoglaló. Tekintsünk egy ABC szabályos háromszöget és annak a belsejében egy O pontot, majd a ponthoz tartozó $A_0B_0C_0$. talpponti

háromszöget. Egy alkalmas pontból kicsinyítsük le az eredeti szabályos háromszöget úgy, hogy a talpponti háromszögbe beírt $A'B'C'$ szabályos háromszöget kapjunk. Egy korábbi dolgozatunkban bizonyítottuk, hogy az $A'B'C'$ szabályos háromszög területe a legkisebb az $A_0B_0C_0$ háromszögbe beírt szabályos háromszögek közül. Pár hónapja Hajdu Endre megfigyelte, hogy az $A_0B_0C_0$ háromszög $A^*B^*C^*$ Morley-háromszöge egyállásúnak tűnik az $A'B'C'$ háromszöggel. Ebben a dolgozatban kimutatjuk, hogy ez **közelítőleg** tényleg így van, mert abban az esetben, amikor az $A_0B_0C_0$ háromszög derékszögű, akkor az $A_0B_0C_0$ és $A^*B^*C^*$ háromszögek közötti elfordulási szög kevesebb, mint $1^\circ 16'$, és ugyanezt sejtjük hegyesszögű háromszögekre is.

Bevezetés. Tekintsünk ABC egyszabályos háromszöget és annak a belsejében egy O pontot. Az O pontból állítsunk merőlegest a háromszög oldalaira, és a talppontokat jelölje A_0, B_0, C_0 olyan sorrendben, hogy A-val szemben legyen A_0,

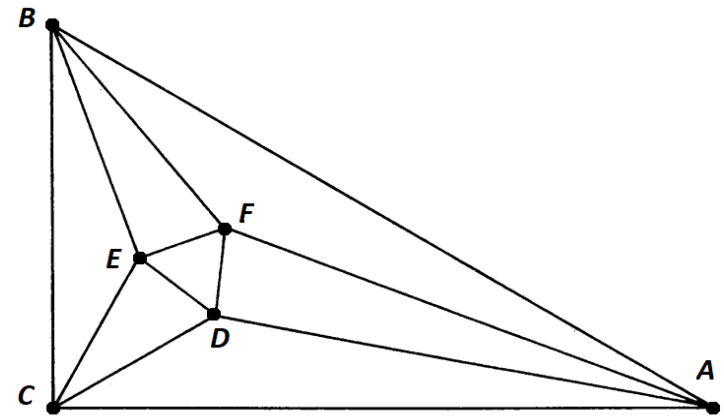

B
C0
B'
A
A0
A'
C'
B0
C

B-vel szemben legyen B_0, C-vel szemben legyen C_0. Világos, hogy tetszőleges $A_0B_0C_0$ háromszög megkapható ilyen módon alkalmas ABC szabályos háromszögből feltéve, hogy az $A_0B_0C_0$ háromszög mindegyik szöge 120°-nál kisebb. A híres Morley-tétel szerint az $A_0B_0C_0$ háromszög belsejében egyértelműen kijelölődik egy $A^*B^*C^*$ szabályos háromszög úgy, hogy az A^*C_0 és a B^*C_0 szakaszok harmadolják az $A_0B_0C_0$ háromszögnek a C-nél lévő szögét, a B^*A_0 és a C^*A_0 szakaszok harmadolják az $A_0B_0C_0$ háromszögnek a A-nál lévő szögét, továbbá a C^*B_0 és az A^*B_0 szakaszok harmadolják az $A_0B_0C_0$ háromszögnek a B-nél lévő szögét. Mármost az $A^*B^*C^*$ szabályos háromszög egyállásúnak tűnik az ABC illetve $A'B'C'$ szabályos háromszögekkel.

Az egyállásúság nyilvánvaló abban az esetben, ha az OA_0, OB_0, OC_0 szakaszok között van két egyenlő, azaz az O pont a ABC háromszög valamelyik szimmetriatengelyén van. Folytonosság okán látható, hogy ha az O pont nincs

rajta egyik szimmetriatengelyen sem, de azok valamelyikéhez közel van, akkor az A^*B^* és az AB szakaszok szöge kicsi kell, hogy legyen. Konkrét számítások viszont azt mutatják, hogy ha az O pont nincs a szimmetriatengelyek egyikén sem, akkor nem várható, hogy az A^*B^* és az AB szakaszok pontosan párhuzamosok legyenek, viszont az általuk bezárt szög a tapasztalatok szerint meglehetősen kicsi. A továbbiakban fel fogjuk használi azt az ismert tényt, hogy az A_0B_0O háromszög körülírt körébe írt A_0B_0 oldalú szabályos háromszög harmadik csúcsán átmegy a C_0O egyenes. (Nyilván hasonló állítás igaz az B_0C_0O és C_0A_0O háromszögekre is, de azokat a tényeket itt most nem fogjuk felhasználni.) Az itt szereplő O pont nyilván az $A_0B_0C_0$ háromszög izogonális pontja, azaz az a pont, melyre az A_0OB_0, B_0OC_0, C_0OA_0 szögek egyformán 120°-osak.

A jelen dolgozatban azt a speciális esetet vizsgáljuk, amikor az $A_0B_0C_0$ háromszög derékszögű. Meg fogjuk mutatni, hogy az A^*B^* és az AB szakaszok szöge minden ilyen esetben kisebb, mint másfél fok.



Derékszögű háromszög Morley-háromszögének állása. Tekintsünk egy derékszögű háromszöget és abban a Morley-háromszöget második ábra szerint.

Koordinátarendszerben a csúcsok: $C = (0;0)$, $A = (b;0)$, $B = (0;a)$, ahol $b = \cos(\frac{\pi}{8} - 3\omega)$ és $a = \sin(\frac{\pi}{8} - 3\omega)$, továbbá az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $\frac{-\pi}{24} \leq \omega < \frac{\pi}{24} \approx 0.1309$. Ki fogjuk számítani az ED szakasz iránytangensét ω függvényeként. Mivel a CD és CE szakaszok a derékszög

harmadolói, ezért $D = (d_x; d_y)$ és $E = (e_x; e_y)$ pontokra $d_x = \sqrt{3}d_y$ és $e_y = \sqrt{3}e_x$. Ezért az ED szakaszra merőleges egyenesek iránytangense:

$$\frac{d_x - e_x}{e_y - d_y} = \frac{\sqrt{3}d_y - e_x}{\sqrt{3}e_x - d_y}$$

Jelölje ezt az iránytangenset $t_1(\omega)$. Szemléletesen nyilvánvaló, hogy $\frac{-\pi}{24} \leq \omega < \frac{\pi}{24}$ esetén $t_1(\omega)$ szigorúan monoton nő, továbbá $t_1(\frac{-\pi}{24}) = 1$ és

$$\lim_{\omega \to \frac{\pi}{24}} t_1(\omega) = \sqrt{3}$$

A CAD háromszöget tekintve megállapíthatjuk, hogy

$$d_y = \left(\cos(\frac{\pi}{8} - 3\omega) - d_x\right) \tan\left(\frac{\pi}{24} - \omega\right)$$

Következésképpen

$$d_y = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{8} - 3\omega\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{24} - \omega\right)}{1 + \sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{24} - \omega\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{8} - 3\omega\right)}{\sqrt{3} + \tan\left(\frac{11\pi}{24} + \omega\right)}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$e_x = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8} - 3\omega\right)}{\sqrt{3} + \tan\left(\frac{3\pi}{8} - \omega\right)}$$

Mármost egyetlen képlettel is felírhatjuk a $t_1(\omega)$ függvényt:

$$t_1(\omega) = \frac{\frac{\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{8}-3\omega\right)}{\sqrt{3}+\tan\left(\frac{11\pi}{24}+\omega\right)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}-3\omega\right)}{\sqrt{3}+\tan\left(\frac{3\pi}{8}-\omega\right)}}{\frac{\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{8}-3\omega\right)}{\sqrt{3}+\tan\left(\frac{3\pi}{8}-\omega\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}-3\omega\right)}{\sqrt{3}+\tan\left(\frac{11\pi}{24}+\omega\right)}}$$

Meglepő módon ez a bonyolult képlet lényegesen leegyszerűsíthető:

$$t_1(\omega) = \tan\left(\frac{7\pi}{24} + \omega\right)$$

Azonban ennek a leegyszerűsítésnek az igazolását itt most mellőzzük, mert a jelen dolgozat mondanivalójához nincs szükség a bizonyításra.

A derékszögű háromszög izogonális pontjának helyzete. Jelölje a fenti ABC derékszögű háromszög izogonális pontját O. Az $ACO\sphericalangle$ tangensét jelölje $t_2(\omega)$. Az ABO háromszög körülírt körén az AB oldalú szabályos háromszög harmadik csúcsa legyen $(u; v)$. Hamar megkapható, hogy

$$\begin{aligned} 2u &= b + a\sqrt{3} \\ 2v &= a + b\sqrt{3} \end{aligned}$$

Tehát

$$k = \frac{a}{b} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8} - 3\omega\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8} - 3\omega\right)} = \tan(\frac{\pi}{8} - 3\omega)$$

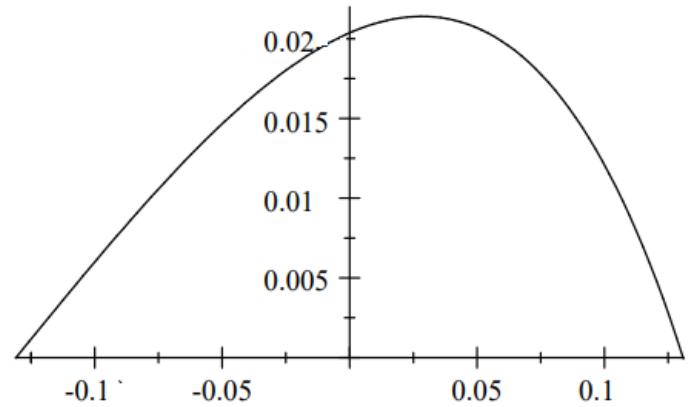
jelöléssel

$$t_2(\omega) = \frac{a + b\sqrt{3}}{b + a\sqrt{3}} = \frac{kb + b\sqrt{3}}{b + kb\sqrt{3}} == \frac{\sqrt{3} + k}{1 + k\sqrt{3}}$$

Mindazonáltal

$$t_2(\omega) = \frac{\sqrt{3} + \tan(\frac{\pi}{8} - 3\omega)}{1 + \sqrt{3}\tan(\frac{\pi}{8} - 3\omega)}$$

Az ígért egyenlőtlenség. Végezetül megmutatjuk, hogy $\frac{-\pi}{24} < \omega < \frac{\pi}{24}$ esetén



fennáll, hogy

$$0 < \arctan t_1(\omega) - \arctan t_2(\omega) < \frac{19\pi}{2700} \approx 0.022108$$

Megadjuk az $\arctan t_1(\omega) - \arctan t_2(\omega)$ függvény grafikonját.

A grafikonról látható, hogy a különbségfüggvény körülbelül 0.03-nál veszi fel maximumát, ami kevesebb, mint $1^\circ 16'$, azaz 0.022108 radián. Itt $1^\circ 16'$ pontos

értéke radiánban:

$$\frac{19\pi}{2700}$$

Hivatkozások

2021: Hajdu E.: A háromszög köré- és beírt szabályos háromszögéről, Dimenziók : Matematikai Közlemények (Sopron), IX. (2021) pp. 43–50.
http://matematika.emk.uni-sopron.hu/images/Dimenziok/Dimenziok_2021/Dim2021_05.pdf

2022: Hujter M.: Talpponti háromszög és négyzetre emelés,
https://math.bme.hu/~hujter/220222.pdf

2024: Wikipédia: Morley-tétel,
https://hu.wikipedia.org/wiki/Morley-t%C3%A9tel

2024: Wikipédia: Izogonális pont,
https://hu.wikipedia.org/wiki/Izogon%C3%A1lis_pont