Haladvány Kiadvány 2024-10-07

A 17-tel való bűvös osztásról és Dürer bűvös négyzetéről

Hujter Mihály

Egy számólóbűvész a következő mutatványnyal lép fel. Kihoz a színpadra néhány hatalmas dobókockát, és megkér pár embert a közönségből, hogy dobják fel ezeket a kockákat ismételten, és adják össze mind a dobott számokat. Amikor az összeg először meghaladja a 90-et, akkor a bűvész kapásból felírja egy táblára az összeg 17-edrészét a tizedespont után 20 tizedesjegy pontossággal. Azt mondja, azért kell felírnia, hogy a közönség ellenőrzhesse a telefonok kalkulátor funkciójával, hogy valóban pontos az eredmény. Például ha 94 az összeg, akkor azt írja fel, hogy

$$\frac{94}{17} = 5.5294117647058235294...$$

Hogyan csinálta? Az osztandó csak hatféle lehet: $91, 92, 93, 94, 95, 96$. Mivel $5 \cdot 17 = 85$ és $6 \cdot 17 = 102$, ezért az eredmény úgy kezdődik, hogy 5 egész. Talán mind a hat esetre a bűvész megjegyezte a folytatást, azaz 6-szor 20 számjegyet? Nem, van ennél sokkal egyszerűbb módszer is!

A bűvésznek csak annyit kell előzetesen megjegyeznie, hogy

$$\frac{1}{17} = 0.0\ 5\ 8\ 8\ \ldots$$

Ezután kihagy négy számjegyet, és a kihagyott helyek után beírhatja azt a négy-jegyű számot, ami a leírt 0588-at 9999-re egészíti ki:

$$\frac{1}{17} = 0.0\ 5\ 8\ 8\_\ \_\ \_\ \_\ 9\ 4\ 1\ 1\ \ldots$$

Mindezt természetesen — egyelőre — csak a saját fejében írja fel. Most veszi a felírt képlet kétszeresét négy tizedesjegy pontossággal:

$$\frac{2}{17} = 0.1\ 1\ 7\ 6\ \ldots$$

Mivel itt is szerepel a 11 ugyanúgy, mint az előző hosszabb képlet végén, ezért az előző hosszabb képletet ugyanúgy kiegészíti 11 után azzal, hogy 76. Itt tartunk tehát:

$$\frac{1}{17} = 0.0\ 5\ 8\ 8\ \_\ \_\ \_\ \_\ 9\ 4\ 1\ 1\ 7\ 6\ \ldots$$

Mármost $99 - 76 = 23$ miatt a kihagyott helyek közül az első kettőre az kerül, hogy 23. Tehát itt tartunk:

$$\frac{1}{17} = 0.0\ 5\ 8\ 8\ 2\ 3\ \_\ \_\ 9\ 4\ 1\ 1\ 7\ 6\ \ldots$$

Mindazonáltal a duplázásnál mégegy tizedesjegyet ki tudunk írni:

$$\frac{2}{17} = 0.1\ 1\ 7\ 6\ 4\ \ldots$$

A fentiek szellemében oda jutunk, hogy

$$\frac{1}{17} = 0.0\ 5\ 8\ 8\ 2\ 3\ 5\ \_\ 9\ 4\ 1\ 1\ 7\ 6\ 4\ \ldots$$

Tehát

$$\frac{2}{17} = 0.1\ 1\ 7\ 6\ 4\ 7\ \ldots$$

Ebből

$$\frac{1}{17} = 0.0\ 5\ 8\ 8\ 2\ 3\ 5\ 2\ 9\ 4\ 1\ 1\ 7\ 6\ 4\ 7\ \ldots$$

Megvan tehát a tizedespont után 16 számjegy. Mármost a végtelen tizedestört alakban ez a 16 számjegy ismétlődik. Mivel $95 = 5 \cdot 17 + 10$, ezért

$$\frac{95}{17} = 5.58823529411764705823529411764 70...$$

De mi a teendő, ha a dobott számok összeg nem 95, hanem mondjuk 94? Mivel $94 - 85 = 9$, és $\frac{9}{17} = 0.52\ldots$, ezért a tizedespont után a tizezesjegyek ugyanúgy ismétlődnek, mint az előbb, csak nem 58-cal, hanem 52-vel kezdődően:

$$\frac{94}{17} = 5.52941176470582352941176470588 23...$$

Ha Ön, kedves olvasó, kételkedik, hogy a fenti eljárás korrekt eredményt szolgáltat, akkor nézze végig és alaposan vizsgálja meg, ellenőrizze a következő számolásokat:

$$
\begin{aligned}
1 \cdot \frac{10^{16}-1}{17} &= 0588235294117647 \\
2 \cdot \frac{10^{16}-1}{17} &= 1176470588235294 \\
3 \cdot \frac{10^{16}-1}{17} &= 1764705882352941 \\
4 \cdot \frac{10^{16}-1}{17} &= 2352941176470588
\end{aligned}
$$

$$5 \cdot \frac{10^{16} - 1}{17} = 2941176470588235$$
$$6 \cdot \frac{10^{16} - 1}{17} = 3529411764705882$$
$$7 \cdot \frac{10^{16} - 1}{17} = 4117647058823529$$
$$8 \cdot \frac{10^{16} - 1}{17} = 4705882352941176$$

$$
\begin{aligned}
9 \cdot \frac{10^{16}-1}{17} &= 5294117647058823 \\
10 \cdot \frac{10^{16}-1}{17} &= 5882352941176470 \\
11 \cdot \frac{10^{16}-1}{17} &= 6470588235294117 \\
12 \cdot \frac{10^{16}-1}{17} &= 7058823529411764
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
13 \cdot \frac{10^{16}-1}{17} &= 7647058823529411 \\
14 \cdot \frac{10^{16}-1}{17} &= 8235294117647058 \\
15 \cdot \frac{10^{16}-1}{17} &= 8823529411764705 \\
16 \cdot \frac{10^{16}-1}{17} &= 9411764705882352
\end{aligned}
$$

Természetesen a hosszadalmas ellenőzés a bűvészt egyáltalán nem érdekli. Az ő szakmájában a vezérelv nem az "átlátható, egyszerű bizonyítás", hanem éppen ellenkezőleg "a zavaros helyzet fenntartása, a cáfolat lehetetlenné tétele".

Joggal merül fel a kérdés, hogy vajon a bűvész nemcsak kétjegyű, hanem akár háromjegyű számokat is gyorsan el tud-e osztani 17-tel. Válaszunk: igen. Először tekintsük át azt a lehetőséget, amikor a háromjegyű szám történetesen maradék nélkül osztható 17-tel. Nézzük például a 901-et. Az utolsó számjegyből és a 17-tel való oszthatóságból látszik, hogy az eredmény utolsó számjegye 3, hiszen 7-et egyjegyű számmal szorozva csak akkor kapunk utolsó jegynek 1-et, ha a másik tényező utolsó jegye 3. (Ezt onnét tudjuk, hogy már 8 éves korunkban megtanultuk a szorzótáblát.) Mármost a kiindulási háromjegyű számot 0.06-tal szorozva nyilván felső becslést kapunk az eredményre. (Itt a 0.06 onnan jön, hogy a fentemlített 0.0588...-nak a felfelé kerekítése.) Esetünkben $901 \cdot 0.06 \approx 54$, tehát 54 alatt nem sokkal kell keresni egy 3-ra végződő számot. Megkaptuk tehát, hogy

$$\frac{901}{17} = 53$$

De mi van, ha az osztandó szám nem osztható maradék nélkül 17-tel, vagy nem is tudjuk, mennyi lenne a maradéka, ha csak maradékosan osztható. Ilyen esetben először a 17-tel való osztási maradékot számítjuk ki. Abból indulunk ki, hogy egy $\overline{abc}$ alakú számnak ugyannyi a maradéka 17-tel osztva, mint a $\overline{bc}$ alakú szám és $2a$ különbségének. Valóban

$$(100a + 10b + c) - (10b + c - 2a) = 17 \cdot 4a$$

Tehát például 878 maradéka ugyanannyi, mint $78 - 8 = 70$ maradéka. Ha 51 alatti szám jött ki különbségként, fejből megállapítjuk a maradékot. Ha pedig 51 vagy több jött ki különbségül, levonhatunk 51-et, mivel az 17-nek éppen háromszorosa. Esetünkben $70 - 51 = 19$, tehát 878 maradéka 17-tel való osztásnál 2.

Mármost $878/17$ pontos tizedestört alakját úgy kapjuk meg, hogy az egészeket $(878-2)/17$ kiszámítása révén a fenti módszerrel kapjuk meg, a tizedespont utáni jegyeket pedig $2/17$ szakaszosan ismétlődő tizedesjegyeivel, a fentiek szerint.

Mindazonáltal a végeredmény így íródik fel a $878/17$ osztás esetében, ha mindent részletezünk:

Először foglaljunk a végeredménynek helyet, a tizedespont előtt 2 jegynek hagyjunk ürességet, a tizedespont után 16-nak.

$$\_\ \_\ .\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

Majd $878 - 2 = 876$ utolsó számjegyéből beírjuk a 8-as számjegyet, hiszen tudjuk a szorzótáblából, hogy $7 \cdot 8 = 56$. A tizedespont után pedig beírjuk a 0588 kétszeresét, mert tudjuk, hogy az eredeti osztandó maradéka 17-tel osztva 2. Ide jutunk tehát:

$$\_\ 8\ .\ 1\ 1\ 7\ 6\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

Mivel $876 \cdot 0.06 \approx 53$, és 53 közelében, de alatta, 48 az, ami 8-ra végződik, megvan az eredmény eleje is. A tizedespont után pedig a kilencedik helytől kezdődően beírjuk azt a négy jegyet, ami az 1176-ot 9999-re pótolja ki. Ide jutunk tehát:

4 8 . 1 1 7 6 _ _ _ _ 8 8 2 3 _ _ _ _

Mivel 1176 kétszerese $1176 \cdot 2 = 2352$, ezért a 23 után 5-ös számjegy jön, de akkor a 76 után pedig $9 - 5 = 4$-es számjegy. Ide jutottunk:

4 8 . 1 1 7 6 4 _ _ _ 8 8 2 3 5 _ _ _

Mivel $1764 \cdot 2 = 3528$, ezért a 35 után kiírhatjuk a 2-est, ás a 64 után kiírhatjuk a $9 - 2 = 7$-est. Most itt tartunk:

4 8 . 1 1 7 6 4 7 _ _ 8 8 2 3 5 2 _ _

Mivel $7647 \cdot 2 = 15294$ és $99 - 94 = 05$, megkapjuk, hogy

$$4\ 8\ .\ 1\ 1\ 7\ 6\ 4\ 7\ 0\ 5\ 8\ 8\ 2\ 3\ 5\ 2\ 9\ 4$$

Most már a tizedespont utáni tizenhetedik helytől lehet ismételni a tizedespont utáni jegyeket. Tehát

$$\frac{878}{17} = 48.117647058823529411...$$

Természetesen kis gyakorlással hamar memorizálhatjuk a ismétlődő 16 darab tizedesjegyet, és akkor a végeredményt sokkal gyorsabban felírhatjuk. Csak az első nyolcat kell igazából megjegyeznünk, hiszen a második nyolc darab számjegy éppen 99999999-re egészíti ki az első nyolcat. A nyolcból négyet már megtanultunk: 0588, a következő négy pedig: 2352.

Régi bevált módszer hosszú számjegysorozatok megjegyzésére, hogy helyettük egy olyan mondatot memorizálunk, melyben az egymás után következő szavak betűinek száma éppen a megfelelő számjegy. A 0 helyett gondolatjelet kódolunk. A mi szóbanforgó, gondolatjellel kezdődő, 7 szavas mondatunk lehet például ez:

— **Kijön eredmény céljából az, ami éppen jó.**

Ha erre a mondatra emlékezve leírjuk, hogy 05882352, mögéje írjuk azt, ami 99999999-re egészít ki, aztán mindent még kétszer ismétlünk, akkor a memorizált mondatból pillanatok alatt felírhatjuk a következőt

058823529411764705882352941176470588235294117647

És ha egy 17-tel nem osztható pozitív egész számot akarunk elosztani úgy, hogy a tizedespont után még legalább 30 számjegy meglegyen, akkor a fenti jelsorozatnak az elejéről kell elhagyni pár számjegyet, a többi már megfelelő lesz a tizedespont utáni számjegysorozatnak.

Kedves olvasó! Próbálja ki a fenti bűvésztrükköt rokonainál, barátainál! Kérjen egy tetszőleges háromjegyű számot, aztán mondja, hogy kapcsolják be a telefonjukat a kalkulátor üzemmódba, és mire az előáll, Ön már a huszönötödik tizedesjegynél tart, és megáll, bevárja a telefonok beállításait. De csak egyetlen egyszer csinálja meg a trükköt! Nehogy hamar kiismerjék, hogy a számjegysorozat ciklikusan ismétlődik! Természetesen, ha véletlenül elsőre 17-tel osztható háromjegyűt kap, akkor mégis ismételje meg a mutatványt egy másik háromjegyűvel, ami már nem osztható 17-tel!

Befejezésül a 17-es számról közlünk egy érdekességet. Az érdekesség félezer évvel ezelőttről való. *Albrecht Dürer*, vagy magyarosan *Dürer Albert*, az apai ágon magyar származású híres német képzőművész és matematikus készített egy bűvös négyzetet, amibe éppen az első 16 pozitív egész számot írta be. Ezen számok átlaga pontosan $\frac{17}{2}$, a számok darabszáma pedig éppen 4-szer 4, ezért először egy üres 4-szer 4-es táblázatot alkotott a mester:

Képeiket a művészek az kép jobb alsó sarokban szokták aláírni, de Dürer balkezes volt. Monogramja németül AD, magyarul DA. Az ábécé első betűje A, a negyedik D. Szóval Dürer beírta a két alsó sarokba a 4-est és az 1-est, közéjük pedig az aktuális évszámot:

4	15	14	1

Ezen négy szám átlaga is pontosan $\frac{17}{2}$. Az egyik 1 távolságra van egy 17-tel oszható számtól, a másik 2 távolságra, a harmadik 3 távolságra, a negyedik 4 távolságra.

Most az maradék üres sarkokra beírjuk azokat a számokat, amelyek ahhoz kellenek, hogy az átlósan szemben lévő sarkoka összeden 17 jöjjön ki:

16			13
4	15	14	1

Most még nem írtuk be a következő számokat: $2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$. Azt szeretének, hogy a legfelső sorban is $\frac{17}{2}$ legyen a beírt számok átlaga. Tehát 2 és 3 kerül a két üres helyre. Ahogyan a legalsó sorban, ugyanúgy a legfelső sorban is váltakozva legyenek a páros és páratlan számok! Ide jutunk:

16	3	2	13
4	15	14	1

Tehát a legfelső sorban is az egyik beírt szám **1** távolságra van egy **17**-tel oszható számtól, a másik **2** távolságra, a harmadik **3** távolságra, a negyedik **4** távolságra. Ha a középső két oszlop mindegyikében azt szeretnénk, hogy ott is $\frac{17}{2}$ legyen a beírt számok átlaga oszloponként külön-külön, és ott is váltakozva legyenek a páratlan és páros számok, akkor már csak ez lehet:

16	3	2	13
	10	11	
	6	7	
4	15	14	1

Észrevehetjük, hogy a középső kétszer kettes négyzetben mindkét átló mentén 17 az összeg. Már csak az 5,8,9,12 számokat kell elheyeznünk. Ha továbbra is fenn akarjuk tartani, hogy minden sorban és minden oszlopban a számok átlaga $\frac{17}{2}$ legyen, akkor egyértelmű a megoldás:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Tehát a négyszer négyes táblázat minden sorában, minden oszlopában, mindkét átlójában $\frac{17}{2}$ a számok átlaga. Ha pedig a középpontra tükrözve szimmetrikusan tekintjük a számpárokat, mindig **17** az összeg. Ez tehát Dürer híres bűvös négyzete.

Illusztrációként csatoljuk Dürer szóbahozott híres alkotását. Szégyen, hogy az interneten nagyon sokszor eltéveszik a címet, ami helyesen: **Melencolia I**.

Hivatkozás

2024: Wikipédia: Melencolia I.

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/18/D%C3%BCrer_Melancholia_I.jpg