



Haladvány Kiadvány 2024-12-31

Dürer négy háromszögének titkairól

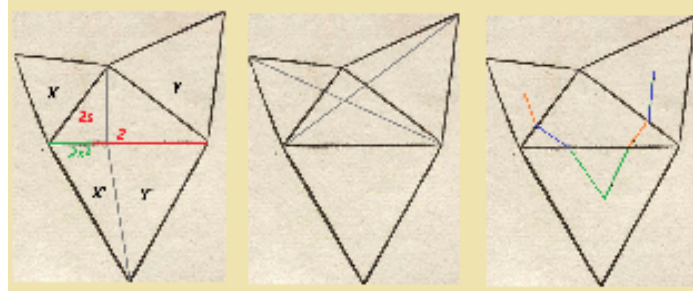
M. Hujter hujter.misi@gmail.com

Fél évezrede *Albrecht Dürer* (1471–1528), a németként ismert reneszánsz képzőművész, feltaláló és matematikus publikált egy könyvet, mely könyv egyik egyszerű ábrájáról lesz itt most szó. Dürer négy nagyszülője közül három is Magyarországon született a tizenötödik században, és a művész maga is büszke volt magyar származására; a munkáit latinul *Albertus Durer* névvel írta alá. A továbbiakban mi csak *Albert mester* néven említjük, hiszen kortársait, *Da Vinci* és *Sanzio* mestereket is csak keresztnevről, *Leonardo* illetve *Raffaello* néven ismeri és csodálja a világ.

A szóbanforgó rajzot az 1. ábraként adjuk meg. Itt kilenc darab egyenes szakasz alkot négy darab háromszöget. A középső derékszögű, a három másik mindegyike egyenlő oldalú háromszög. Itt most három fontos matematikai tételcsoportot is kiolvassunk ebből az egyszerű ábrából.

1. tételcsoport: *A legnagyobb egyenlő oldalú háromszög területe megegyezik a két kisebb egyenlő oldalú háromszög területének összegével.* Ez lényegében a jól ismert Pitagorasz-tétel. Ha berajzoljuk a derékszögű háromszög legrövidebb magasságvonalát, és annak talppontjából kiinduló egyenessel kettévágjuk a legnagyobb egyenlő oldalú háromszöget a 2. ábra szerint, akkor a Pitagorasz-tétel "disztingváltabb" változatához jutunk: a területek tekintetében $X = X'$ és $Y = Y'$. Rögtön bizonyítjuk is a tételt ebben a "disztingváltabb" változatában. Szimmetria okán elég megmutatni, hogy $X = X'$. A derékszögű háromszög átfogójának hosszát 2 egységnyinek vesszük. A legnagyobb egyenlő oldalú háromszög magasságát jelölje m . (Tulajdonképpen $m = \sqrt{3}$ lesz igaz, de ezt a tényt most nem vesszük figyelembe.) Ha az X területű egyenlő oldalú háromszög oldala $2s$, akkor hasonlóság okán a magassága ms . Tehát $X = 2s \cdot ms/2 = ms^2$. Az X' területű háromszögnek az átfogóra eső oldala hasonlóság okán: $2s^2$. Tehát $X' = (2s^2) \cdot m/2 = ms^2$.

A Pitagorasz-tétel jól ismert általánosítása a Ptolemaiosz-tétel. Tekintsünk egy konvex négyszöget ciklikusan $a, b, \bar{a}, \bar{b}$ oldalhosszúságokkal és $c, \bar{c}$ átlóhosszúságokkal. Itt az a és b hosszúságú oldalakkal a c hosszúságú átló alkot háromszöget, a b és $\bar{a}$ hosszúságú oldalakkal pedig a $\bar{c}$ hosszúságú átló. Ptolemaiosz tétele szerint akkor és csak akkor írható kör a négyszög köré, ha $a\bar{a} + b\bar{b} = c\bar{c}$. Ez a tétel az $a = \bar{a}$, $b = \bar{b}$ esetre vonatkoztatva a Pitagorasz-tétel általánosítása. Abban



az esetben pedig, ha $a = b = c$, azt kapjuk, hogy a négyszög köré akkor és csak akkor írható kör, ha $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$.

2. tételcsoport. A derékszögű háromszög hegyesszögű csúcsait kössük össze az átellenes szabályos háromszögek legtávolabbi csúcsával. A metszéspontot jelölje M . Állítjuk: M izogonális pont, azaz M -ből a derékszögű háromszög mindhárom oldala 120 fokos szög alatt látszik. Indoklás: A most behúzott vonalak a derékszögű háromszög derékszögű csúcsával kijelölnek két tompaszögű háromszöget; a tompaszög 150 fokos. Látható, hogy a két tompaszögű háromszög egybevágó, hiszen az egyik a másikból 60 fokos elforgatással kapható meg. Ebből már következik, hogy M rajta van a két kisebbik egyenlőoldali háromszög körülírt körének mindegyikén. Mindez maga után vonja, hogy M -ből a derékszögű háromszög mindhárom oldala 120 fokos szög alatt látszik. Sőt még ennél több is kimondható: Az eredeti 9 szakasz közül az a 6 darab, mely nem a derékszögű háromszög oldala, egyformán 60 fokos szög alatt látszik az M pontból. Minektutána az is kijött, hogy a derékszögű csúcs, az M pont és a legnagyobb egyenlőoldali háromszögnek a derékszögű csúcsától legtávolabbi csúcsa egy egyenesen van. Sőt a három darab, az M ponton átmenő szakasz hossza egyformán ugyanannyi, mint az M pontnak a derékszögű háromszög csúcsaitól mért távolságai összege. Mindez a Ptolemaiosz-tétel fent említett speciális esetéből következik.

3. tételcsoport. Tekintsük a három darab szabályos háromszög mindegyikének a középpontját. Állítjuk: ez a három pont is szabályos háromszöget alkot. Indoklás: Az eredeti derékszögű háromszög oldalai harmadolópontjai tekintve vizsgáljuk meg a 4. ábrát. Vegyük észre, hogy a zöld szakaszok egybevágók, és a jobb oldalnak a 60 fokos balra forgatásával kapható meg a bal oldali. A kék színű szakaszokra is elmondható mindez. Úgyisintén a narancs színű szakaszokra. A bal oldalon is és a jobb oldalon is a narancs és a kék szakaszok meghatároznak egy-egy parallelogrammát. Vegyük észre, hogy a jobb oldali parallelogrammának a 60 fokos balra forgatása a legnagyobb egyenlőoldali háromszög középpontja körül éppen a bal oldali parallelogrammát eredményezi. Következmény: a jobb oldal szabályos háromszög középpontjának a 60 fokos balra forgatása a legnagyobb egyenlőoldali háromszög középpontja körül éppen a bal oldali szabályos háromszög középpontját adja.