

Sudar számok területarányként és máskülönben

Hujter Mihály
hujter.misi@gmail.com

Mottó: *sudár jegenyefa, földre hajlik az ága* (népdal)

Az n -edik háromszögszám: $1 + 2 + \dots + n$. Két évszázaddal ezelőtt Győry Sándor (1795–1870) a *sudar* szám elnevezést adta az ilyen számoknak. Megértjük az elnevezéseket, ha így írjuk fel a számokat:

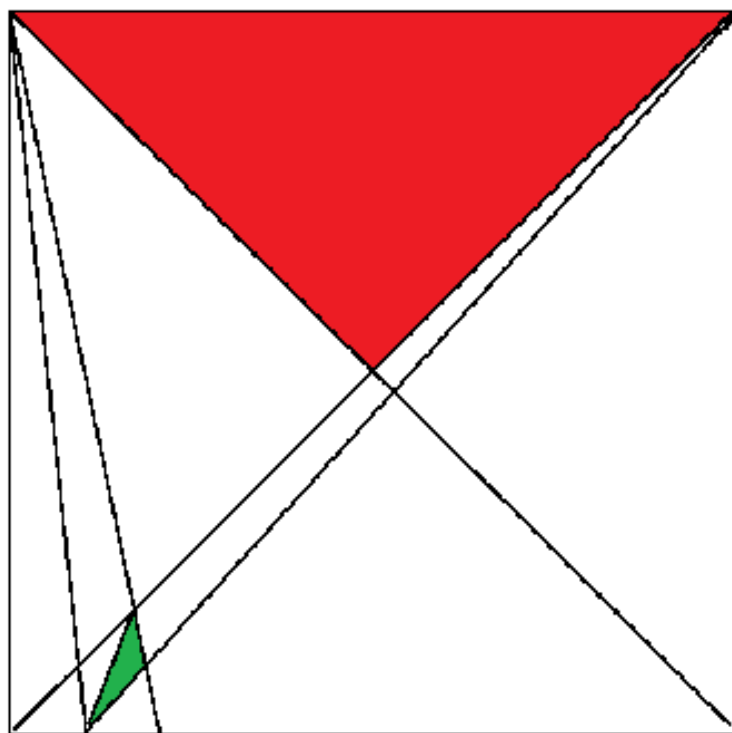
$$\begin{aligned} &+1 \\ &+1 + 1 \\ &+1 + 1 + 1 \\ &\vdots \\ &+1 + 1 + 1 + \dots + 1 \end{aligned}$$

Megemlíjtük még, hogy Nyíry István (1776–1838) a háromszögszámoknak, a négyzetszámoknak, az ötszögszámoknak stb a *szegletes számok* elnevezést adta (latinul: *numerus figuralis*). Visszatérve Győry Sándorhoz: ő a binomiális tételt *kétszaki oktatmánynak* hívta. Mármint az n -edik háromszögszám úgy is értelmezhető, mint az $(1+x)^{n+1}$ binomhatvány kifejtésében x^2 együtthatója, azaz a "négyzetes" tag együtthatója egy "háromszög"-szám.

Itt most egy új meghatározását adjuk a háromszögszámoknak egy geometriai négyzet felosztásából kiindulva. Adott $n \geq 3$ egész számra tekintsük egy $(n-1) \times (n-1)$ méretű négyzetet, és a két átlójával osszuk négy egyenlő részre. Aztán az egyik oldalon az egyik saroktól mérjük le 1 illetve 2 egységnyi távolságot, és további három-négy egyenes behúzásával készítsük az ábrán látható felosztást.

Állítjuk, a piros és a zöld területek aránya éppen az n -edik háromszögszám.

Az teljesen világos, hogy a piros terület: $\frac{(n-1)^2}{4}$. A párhuzamos szelők tétele alapján az is könnyen látható, hogy a zöld háromszög alatti fehér háromszög területe: $\frac{n-1}{2n}$. Ezen fehér háromszög és a zöld háromszög uniójának területe



(szintén a párhuzamos szelők tétele alapján): $\frac{n-1}{n+1}$. Tehát a zöld terület: $\frac{n-1}{n+1} - \frac{n-1}{2n}$. Mindazonáltal

$$\frac{\frac{(n-1)^2}{4}}{\frac{n-1}{n+1} - \frac{n-1}{2n}} = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + \dots + n$$

Ezzel az állításunkat bebizonyítottuk.

Végezetül nem hagyjuk említés nélkül, hogy három darab háromjegyű sudar-szám az *Újszövetség*ben explicit módon szerepel. A *Fenevad* háromszögszáma: 666, *Szent Péter*: 153, *Szent Pál*: 276. Érdekes, hogy mindhárom osztható 3-mal. Az eddig ismert *tökéletes számok* is mind háromszögszámok: 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328, 2305843008139952128, $\dots$ (Egy pozitív egész szám akkor tökéletes, ha éppen az összege a saját pozitív osztóinak, önmagát természetesen kihagyva, mint például $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.) Érdekes, hogy a tökéletes számok milyen gyakran végződnek 28-ra 10-es számrendszerben. Márpedig 10 is háromszögszám. Nagyon nehéz kérdés, hogy vajon miért páros minden tökéletes szám. Úgyszintén nehéz: Vajon végtelen sok páros sudar szám tökéletes-e?

Legeslegvégezetül megemlíti, hogy két egymásutáni háromszögszám összege egy négyzetszám. Gauss bizonyította 19 évesen, hogy minden nemnegatív egész három darab háromszögszám összege (a nullát is háromszögszámnak tekintve). Így kódolta magának:

$$\text{num} = \Delta + \Delta + \Delta$$

A jelen dolgozat dátuma 2025-02-25. Márpedig $\sqrt{2025} = 45$ és $\sqrt{0225} = 15$, mindegyik sudar szám, és az egyik háromszorosa a másiknak.

Hivatkozások

Györy Sándor, *A' felsőbb analysis' elemei. 1.* Magyar Királyi Egyetem, Buda, 1836.

<https://real-eod.mtak.hu/3020>

https://hu.wikipedia.org/wiki/Gy%C5%91ry_S%C3%A1ndor

Magyar Tudós Társaság (szerk.): *Mathematicai műszótár*, Magyar Királyi Egyetem, Buda, 1834.

<https://real-eod.mtak.hu/1337/>

János evangélista (feltételezett szerkesztő): *A jelenések könyve* 13,18.

https://hu.wikipedia.org/wiki/A_jelen%C3%A9sek_k%C3%B6nyve

[https://hu.wikipedia.org/wiki/666_\(sz%C3%A1m\)](https://hu.wikipedia.org/wiki/666_(sz%C3%A1m))

<https://hu.wikipedia.org/wiki/Hexakosioihexekontahexaf%C3%B3bia>

János evangélista (feltételezett szerkesztő): *János evangéliuma* 21,11.

https://hu.wikipedia.org/wiki/J%C3%A1nos_evangel%C3%A9liuma

[https://en.wikipedia.org/wiki/153_\(number\)](https://en.wikipedia.org/wiki/153_(number))

Lukács evangélista (feltételezett szerkesztő): *Az apostolok cselekedetei* 27,37.

https://hu.wikipedia.org/wiki/Az_apostolok_cselekedetei

Wikipédia: *Háromszögszámok*.
<https://hu.wikipedia.org/wiki/H%C3%A1romsz%C3%B6gsz%C3%A1mok>
Wikipédia: *Tökéletes számok*.
https://hu.wikipedia.org/wiki/T%C3%B6k%C3%A9letes_sz%C3%A1mok
Kerényi György (népdalgyűjtő): *Kis kút, kerek kút*,
https://hu.wikipedia.org/wiki/Kis_k%C3%BAt,_kerek_k%C3%BAt
História Tudósnaptár: *J. C. F. Gauss*,
<https://tudosnaptar.kfki.hu/historia/egyen.php?nanev=gauss>