Haladvány Kiadvány 2025-04-05

# A 13 és 1013 prímek, továbbá a 2025 évszám kapcsolatáról

Hujter Mihály hujter.misi@gmail.com

Bizonyítjuk, hogy

$$\begin{aligned}
c_{2025} &= 2\cos\frac{2025\pi}{1013} - 1 \\
c_{2023} &= 2\cos\frac{2023\pi}{1013} - 1 \\
c_{2021} &= 2\cos\frac{2021\pi}{1013} - 1 \\
&\vdots \\
c_{1015} &= 2\cos\frac{1015\pi}{1013} - 1
\end{aligned}$$

esetén

$$\frac{1}{c_{2025}} + \frac{1}{c_{2023}} + \cdots + \frac{1}{c_{1017}} + \frac{1}{c_{1015}} = 13^2$$

Legyen

$$w = \cos\frac{\pi}{1013} + i\sin\frac{\pi}{1013}$$

Tehát

$$w^{1013} = -1$$

Mármost $z \neq 1$ és $z^{1013} = -1$ esetén állítjuk, hogy

$$\frac{-1}{1 + z + z^{-1}} = \sum_{q=0}^{674} z^{2+3q}$$

Valóban,

$$
\begin{aligned}
& \sum_{q=0}^{674} z^{2+3q} \\
= \quad & z^2 \cdot \sum_{q=0}^{674} z^{3q} = z^2 \cdot \frac{1-(z^3)^{675}}{1-z^3} \\
= \quad & \frac{z^2 - z^{2027}}{1-z^3} = \frac{z^2 - z}{1-z^3}
\end{aligned}
$$

és

$$\frac{1}{1+z+z^{-1}} + \frac{z^2 - z}{1-z^3} = 0$$

Mindazonáltal $p = 0, 1, \cdots, 505$ esetén

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_{2025-2p}} \\ = \; & \frac{1}{1 + 2\cos\frac{(1+2p)\pi}{1013}} = \frac{1}{1 + w^{1+2p} + w^{-1-2p}} \\ = \; & -\sum_{q=0}^{674} w^{(1+2p)(2+3q)} \end{aligned}$$

Tehát azt kell megmutatnunk, hogy

$$\sum_{p=0}^{505} \sum_{q=0}^{674} w^{(1+2p)(2+3q)} = -169$$

Legyen

$$S_q = \sum_{p=0}^{505} w^{(1+2p)(2+3q)}$$

Megmutatjuk, hogy $S_{337} = -506$, és hogy $q = 0, 1, \cdots, 336$ esetén $S_q + S_{674-q} = 1$. Valóban

$$\begin{aligned} S_{337} &= \sum_{p=0}^{505} w^{(1+2p)(2+3\cdot 337)} \\ &= \sum_{p=0}^{505} w^{2026p+1013} = \sum_{p=0}^{505} (-1) = -506 \end{aligned}$$

Másrészt $q = 0, 1, \cdots, 336$ esetén

$$\begin{aligned}
& S_q \\
= \; & \sum_{p=0}^{505} w^{(1+2p)(2+3q)} = w^{2+3q} \cdot \sum_{p=0}^{505} w^{(4+6q)p} \\
= \; & w^{2+3q} \cdot \frac{1 - w^{(4+6q)506}}{1 - w^{4+6q}} \\
= \; & w^{2+3q} \cdot \frac{1 - w^{2024+3036q}}{1 - w^{4+6q}} \\
= \; & \frac{w^{2+3q} - w^{2026+3039q}}{1 - w^{4+6q}} = \frac{w^{2+3q} - (-1)^q}{1 - w^{4+6q}} \\
= \; & \frac{w^{2+3q} - (-1)^q}{\left(1 - w^{2+3q}\right)\left(1 + w^{2+3q}\right)} \\
= \; & \frac{1}{1 + (-1)^q w^{2+3q}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& S_{674-q} \\
= & \sum_{p=0}^{505} w^{(1+2p)(2+3(674-q))} = \sum_{p=0}^{505} w^{(1+2p)(2024-3q)} \\
= & \sum_{p=0}^{505} w^{-(1+2p)(2+3q)} = \frac{1}{1+(-1)^q w^{-2-3q}}
\end{aligned}
$$

Mármost $u = (-1)^q w^{2+3q}$ jelöléssel

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{1+(-1)^q w^{2+3q}} + \frac{1}{1+(-1)^q w^{-2-3q}} \\
= & \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+u^{-1}} = 1
\end{aligned}
$$

Azzal leszünk készen, hogy $337 - 506 = -169$.