

Varázsdíók és permutációk

dr. Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém,
SZALKAI.ISTVAN@MIK.UNI-PANNON.HU

2025.07.31.

HALADVANY-KIADVANY, 2025.07.31.
<http://math.bme.hu/~hujter/250731.pdf>
<http://www.math.bme.hu/~hujter/halad>

Bevezetés

Vegyünk elő három kisméretű tárgyat, mondjuk **c**eruza, **a**jakrúzs, **b**icska. Az asztalra teszünk 24 diót, amiből három önként jelentkezőnek 1, 2 illetve 3 szemet adunk, tegyék zsebre. Megkérjük őket, hogy távollétünkben rejtessenek el zsebükbe egy-egy tárgyat. Továbbá: aki a **c**eruzát dugta el, vegyen el még *ugyanannyi* diót, mint amennyitadtunk neki, az **a**jakrúzs gazdája *kétszer annyit* vegyen el mint amennyit tőlünk kapott, míg a **b**icskánkat rejtegető médium dióinak *négyszeresét* vegye még el, és tegyék zsebre ezeket a diókat is. A szobába visszatérve csak rápillantunk az asztalon maradt diókra (megszámoljuk őket), és kitaláljuk, kinél milyen tárgy van!

A megoldás kulcsát, azt hiszem, nem kell részleteznem: *minden lehetőség* (permutáció) *esetén más az asztalon maradt diók száma*. Ezt kis táblázatban könnyen ki is mutathatjuk, sőt hatásosabb a mutatóvány, ha a táblázatot kívülről is megtanuljuk!

Kezdetben kiosztottunk $1+2+3=6$ diót, tehát maradt az asztalon $24 - 6 = 18$. Ez után milyen esetek lehetnek ($a=2^*$, $b=4^*$, $c=1^*$):

1	2	3	további elvett diók száma	=>	marad
a	b	c	$2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 13$		$18 - 13 = 5$
a	c	b	$2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 16$		$18 - 16 = 2$
b	a	c	$4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 11$		$18 - 11 = 7$
b	c	a	$4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$		$18 - 12 = 6$
c	a	b	$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 17$		$18 - 17 = 1$
c	b	a	$1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 15$		$18 - 15 = 3$

1. Táblázat

Jelen cikkünkben megvizsgáljuk, hogy több tárgy esetén hogyan működik a (matematikai) bűvésztrükk a lehető legkevesebb dióval.

Permutációk

Az általános megfogalmazáshoz szükségünk lesz a permutációk általános fogalmára és a felhasznált jelölésekre. Az alábbiakban n egy tetszőleges rögzített természetes szám (lehetőleg $1 \leq n$).

Egy n -edrendű **permutáció** egy n elemű halmaz elemeit helyezi el n helyre, ennek szokásos jelölése

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

ahol az *alsó sor* az elemek (sorszámai), a *felső sor* pedig a helyek ($1 \leq \pi(i) \leq n$). Matematikailag tehát egy permutáció egy

$$\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

bijektív (kölcönösen egy-egy értelmű) függvény: megmondja, hogy az i -dik helyre melyik elemet tegyük (felső sor = Értelmezési Tartomány, alsó sor = Érték Készlet).

Ebben a cikkben mi csak egyszerűen $\langle \pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n) \rangle$ -t, vagy inkább $\langle \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \rangle$ -t írunk¹⁾ (1) helyett, hiszen a felső sort mindenki tudja fejből.

A permutáció, mint bijektív függvény *inverze* nyilvánvaló (ÉT és ÉK felcserélése), π^{-1} -el jelöljük. Például:

¹⁾ Vigyázat: a szokásos $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ jelölés *ciklikus permutációt* ("ciklust") jelöl: $\pi(a_1) = a_2$, $\pi(a_2) = a_3$, ..., $\pi(a_n) = a_1$. Tehát például $\pi = (1, 3, 6, 2, 5, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ míg $\rho = \langle 1, 3, 6, 2, 5, 4 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

$\pi = (1, 3, 6, 2, 5, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ esetén $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (4, 5, 2, 6, 3, 1)$ (az elemek fordított sorrendben),

és $\rho = \langle 1, 3, 6, 2, 5, 4 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ esetén $\rho^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \langle 1, 4, 2, 6, 5, 3 \rangle$ (2.hely=3.elem $\Leftrightarrow$ 2.elem=3.hely).

A trükk általánosítása

1. Jelölések: Legyen n = személyek és tárgyak száma,

$i = 1, \dots, n$ a személyek sorszámai,

$j = 1, \dots, n$ a tárgyak sorszámai,

$x_i = i$ -dik személy által kezdetben kapott diók száma,

$g_j = j$ -dik tárgy választásakor a szorzótényező,

$i = \pi(j) = j$ -edik tárgyat melyik személy választotta

$\Leftrightarrow j = \pi^{-1}(i) = i$ -edik személy által választott tárgy. $\square$

Ekkor a tárgyak választása után *felhasznált* (zsebredugott) *diók* száma:

$$T_\pi := \sum_{j=1}^n g_j \cdot x_{\pi(j)} , \quad (3)$$

és a π permutációkat *antilexikografikus* (csökkenő) sorrendben felírva az 1. Táblázat a következőképpen alakul:

*4	*2	*1	
π_3	π_2	π_1	T_π
3	2	1	$4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 17$
3	1	2	$4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 16$
2	3	1	$4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 15$
2	1	3	$4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 13$
1	3	2	$4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 12$
1	2	3	$4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 11$

2. Táblázat

(Vigyázat: az asztalon a felhasznált diók számának a komplementere marad!)

Mint említettük, csak olyan $\bar{g} = \{g_1, \dots, g_n\}$ számhalmazokkal foglalkozunk, amelyekre:

A T_π értékek minden $\pi \in S_n$ permutációra *különbözőek*. (*)

Nyilván (*) teljesüléséhez a számok sorrendje $\bar{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ és $\bar{g}$ -ben lényegtelen, és persze $\bar{x}$ és $\bar{g}$ elemei különbözőek. Azonban kényelmi okokból felteszük, hogy

$$g_1 < g_2 < \dots < g_n \quad (4)$$

és csak a következő "egyszerű" esettel foglalkozunk:

$$x_i = i \quad (i = 1, \dots, n) . \quad (5)$$

2. Célunk olyan $\bar{g}$ számhalmaz megkeresése, amelyre $\max_{\pi \in S_n} \{T_\pi\}$ (a szükséges diók száma) minimális (feltéve $x_i = i$).

3. Állítás: Ha mindegyik x_i számot ugyanazzal az y számmal növeljük (vagy csökkentjük), akkor a (*) tulajdonság nem változik:

$$T_\pi = \sum_{j=1}^n g_j \cdot (x_{\pi(j)} + y) = \sum_{j=1}^n g_j \cdot x_{\pi(j)} + y \cdot \sum_{j=1}^n g_j . \quad \square$$

4. Tétel: Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ számhoz léteznek olyan $\bar{x}$ és $\bar{g}$ számhalmazok, amelyekre (*) teljesül.

Bizonyítás: Legyenek $\bar{x} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ és $\bar{g} = \{1, n, n^2, \dots, n^{n-1}\}$. Ekkor a T_π értékek pontosan az n alapú számrendszerben felírt, n számjegyből álló számok, amelyek persze mind különbözőek. (Hasonló megjegyzések érvényesek a $\bar{g} = \{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$ számhalmazokra bármilyen $n \leq g$ természetes számra.) $\square$

5. Megjegyzés: A fenti konstrukció nagyon redundáns, mert 0-tól $n^n - 1$ -ig minden számot kódolnak a $\sum_{j=1}^n g_j \cdot x_j$ összegek *tetszőleges* $x_j \in \mathbb{N}$ ($0 \leq x_j < n$) számokra, azaz n^n különböző értékeket vesznek fel a csak $|S_n| = n!$ lehetőség²⁾ helyett, és $\max_{\pi \in S_n} \{T_\pi\} = n^n - 1$.

Ezek alapján $\max_{\pi \in S_n} \{T_\pi\} < n^n - 1$ is könnyen elképzelhető, vagyis érdemes próbálkoznunk optimális(abb) $\bar{g}$ sorozatok keresésével.

6. Például, az eredeti feladatban $n = 3$ de már $\bar{g} = (1, 2, 2^2)$ is "működik" (teljesíti (*)-t).

²⁾ S_n jelöli az $(1, \dots, n)$ elemek összes π permutációjának halmazát. $|S_n| = n!$ és a Stirling-formula szerint $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} < n^n$.

$n = 4$ esetében pedig $\bar{g} = (1, 3, 3^2, 3^3) = (1, 3, 9, 27)$ nem jó, mert például

$$T_{\langle 3,1,2,4 \rangle}^{\leftarrow} = (3) \cdot [27] + (1) \cdot [9] + (2) \cdot [3] + (4) \cdot [1] = 3 \cdot 27 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 100$$

és szintén

$$T_{\langle 2,4,3,1 \rangle}^{\leftarrow} = (2) \cdot [27] + (4) \cdot [9] + (3) \cdot [3] + (1) \cdot [1] = 2 \cdot 27 + 4 \cdot 9 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 100$$

Azonban, érdekes módon $n = 4$ esetében például $\bar{g} = (1, 3, 3^2, 28)$, $(1, 3, 8, 27)$, sőt $(1, 3, 8, 26)$ is megfelelő. (Excel táblázatban ezeket könnyen ellenőrizhetjük, sőt Excelben még kísérletezgethetünk is különböző $\bar{g}$ sorozatokkal.)

Amint a 2. Táblázatban láthatjuk, a $\bar{g}$ és a π számsorozatok "visszafelé" írtuk: $\bar{g} = \{g_n, \dots, g_1\}$ és $\overleftarrow{\pi} := \langle \pi_n, \dots, \pi_2, \pi_1 \rangle$, vagyis a (5) összeget így számoltuk:

$$S_\pi := g_n \cdot \pi_n + g_{n-1} \cdot \pi_{n-1} + \dots + g_1 \cdot \pi_1. \quad (6)$$

Mit jelent a permutációk *antilexikografikus* (csökkenő) sorrendje?

7. Definíció: Jelölje $\succ$ az **antilexikografikus** rendezést S_n -en:

$\pi \succ \rho$ ha van olyan $j_0 \leq n$ index, amelyre $\pi(j) = \rho(j)$ ha $n \geq j > j_0$ és $\pi(j_0) > \rho(j_0)$, és legyen

$\pi \triangleright \rho$ ha π (közvetlen) **rákövetkezője** ρ -nak, azaz $\pi \succ \rho$ és *nincs* olyan σ amelyre $\pi \succ \sigma \succ \rho$ lenne. $\square$

8. Például: $\langle 5, 2, 4, 3, 1 \rangle^{\leftarrow} \succ \langle 4, 5, 2, 3, 1 \rangle^{\leftarrow}$ ($j_0 = n = 5$) és $\langle 4, 2, 3, 5, 1 \rangle^{\leftarrow} \succ \langle 4, 2, 1, 5, 3 \rangle^{\leftarrow}$ ($j_0 = 3 < n$), valamint $\langle 5, 2, 4, 3, 1 \rangle^{\leftarrow} \triangleright \langle 5, 2, 4, 1, 3 \rangle^{\leftarrow}$ ($j_0 = 4 < n$).

9. Megjegyzés: $j_0 = n$ esetén persze egyetlen $j > j_0$ sincs csak $\pi(n) > \rho(n)$. Továbbá $j_0 = 1$ sem lehet, hiszen π és ρ mindketten permutációk S_n -ből.

Nyilván $\succ$ teljes rendezés az S_n halmazon, $id = \langle n, \dots, 2, 1 \rangle^{\leftarrow}$ a legnagyobb, $\delta = \langle 1, 2, \dots, n \rangle^{\leftarrow}$ a legkisebb permutáció, és bármely $\pi \neq id$ permutációhoz *pontosan egy* ρ permutáció van, amelyre $\pi \triangleright \rho$.

10. Állítás: $\bar{g} = \{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$ számhalmazra ($n \leq g$) teljesül, hogy

$$\pi \succ \rho \iff T_\pi > T_\rho \quad (7)$$

(könnyen belátható). $\square$

11. Tehát keresünk olyan $\bar{g} = \{g_1, \dots, g_n\}$ számhalmazokat, amelyekre (7) teljesül. Mivel S_n véges halmaz, (7) következik az alábbi összefüggésből:

$$\pi \triangleright \rho \implies T_\pi > T_\rho, \quad (8)$$

vagyis elég csak $\pi \triangleright \rho$ esetekkel foglalkoznunk és biztosítani (8)-t.

A $j_0 = 2$ eset *becsapósan* egyszerű: $j_0 = 2 \Rightarrow \pi(2) > \rho(2)$, és mivel a két permutáció többi eleme megegyezik, ezért $\pi(1) = \rho(2)$ és $\rho(1) = \pi(2)$.

(8) -hoz elég teljesíteni:

$$g_2 \cdot \pi(2) + g_1 \cdot \pi(1) > g_2 \cdot \rho(2) + g_1 \cdot \rho(1), \quad \text{azaz}$$

$$g_2 \cdot (\pi(2) - \rho(2)) > g_1 \cdot (\rho(1) - \pi(1)) = g_1 \cdot (\pi(2) - \rho(2)),$$

tehát eddig g_2 és g_1 tetszőlegesen lehetnek, ha $g_2 > g_1$.

▷ vizsgálata

Az alábbiakban (6) jelöléseit használjuk.

12. Tétel: $\pi \triangleright \rho$ pontosan akkor teljesül, ha:

- van $2 \leq j_0 \leq n$ amelyre $\pi(j) = \rho(j)$ ha $n \geq j > j_0$ ($j_0 = n$ esetén nincs j) és $\pi_{j_0} > \rho_{j_0}$,

- teljesülnek a $\{\pi_n, \dots, \pi_{j_0+1}\} = \{\sigma_n, \dots, \sigma_{j_0+1}\}$ (esetleg üres) ($\diamond$)

- és emiatt a $H_{j_0} := \{\pi_{j_0}, \dots, \pi_1\} = \{\sigma_{j_0}, \dots, \sigma_1\}$ halmaz-egyenlőtlenségek,

- $\pi_{j_0} \in H_{j_0}$ tetszőleges DE $\pi_{j_0} \neq 1$

- $\rho_{j_0} = \max \{\sigma_j \in H_{j_0} : \sigma_j < \pi_{j_0}\}$ (∇),

- $\pi_{j_0-1} < \pi_{j_0-2} < \dots < \pi_1$ és $\sigma_{j_0-1} > \sigma_{j_0-2} > \dots > \sigma_1$. ($\triangle$)

A bizonyítást az Olvasóra bízunk. □

g_{j_0} vizsgálata

13. Tétel: Legyen tehát $\pi \triangleright \rho$ mint a 12. Tételben. Ekkor (8) a következőt jelenti, ($\diamond$) miatt:

$$g_{j_0} \cdot \pi_{j_0} + \dots + g_1 \cdot \pi_1 > g_{j_0} \cdot \sigma_{j_0} + \dots + g_1 \cdot \sigma_1$$

azaz

$$g_{j_0} \cdot (\pi_{j_0} - \sigma_{j_0}) > g_{j_0-1} \cdot (\sigma_{j_0-1} - \pi_{j_0-1}) + \dots + g_1 \cdot (\sigma_1 - \pi_1) . \quad (\heartsuit)$$

□

Tehát eddigi vizsgálataink alapján g_{j_0} értékét meghatározhatjuk indukcióval $j_0 = 1, 2, \dots, n$ -re a következő algoritmussal:

14. Algoritmus:

- g_2 és g_1 tetszőlegesen, $g_2 > g_1$,
- $H_{j_0} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ tetszőleges j_0 -elemű halmaz (ez $\binom{n}{j_0}$ lehetőség),
- $\pi_{j_0} \in H_{j_0}$ tetszőleges DE $\pi_{j_0} \neq 1$ (ez j_0 lehetőség ha $1 \notin H_{j_0}$) ³⁾,
- elkészítjük a π és ρ permutációk j_0 "előtti" részeit (∇) és ($\triangle$) alapján,
- ($\heartsuit$) egy alsó becslést ad g_{j_0} értékére. □

Numerikus eredmények

Excel táblázatokkal (és "kézzel") végigszámoltam a 14. Algoritmust $n = 4$ és $n = 5$ esetben, a következő $\bar{g}$ számhalmazokat kaptam (és ellenőriztem):

$$n = 4 \text{ esetén } (g_1, \dots, g_4) = (1, 2, 5, 15), \quad \max_{\pi \in S_n} \{T_\pi\} = 80 < 4^4 - 1 = 255 ,$$

$$n = 5 \text{ esetén } (g_1, \dots, g_5) = (1, 2, 6, 23, 99), \quad \max_{\pi \in S_n} \{T_\pi\} = 610 < 5^5 - 1 = 3124.$$

Várjuk az Olvasók további eredményeit, megjegyzéseit.

Irodalom

[P] **Perelman, J.I.:** *Matematikai történetek és rejtvények*, Gondolat, Budapest, 1979.

[Sz] **Szalkai István:** *Egy ötlet*, Polygon VII. (1997), 85-88.

³⁾ Összesen $\binom{n-1}{j_0} \cdot j_0 + \binom{n-1}{j_0-1} \cdot (j_0 - 1)$ lehetőség.