

A "természetes" algebrai számok és két alkalmazás

dr. Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém,
SZALKAI.ISTVAN@MIK.UNI-PANNON.HU

2025.08.26.

HALADVA'NY KIADVA'NY 250826.

<http://math.bme.hu/~hujter/250826.pdf>

<https://math.bme.hu/~hujter/halad.htm>

1. Bevezetés

Amikor tárgyainkat megszámloljuk, egészen *természetes* módon egyesével rájuk bökkünk (sorbarendezzük őket), és elmondjuk a szokásos versikét: "*egy, kettő, három, ...*"¹⁾. Néha, különösen hó végén a "*nulla*" is *természetesnek* tűnik. Amikor adósságba kerülünk, legtöbbször az is *egész szám*, és így már érthetőek a " $(-2) + 2 = 0$ " és " $2 \cdot (-2) = -4$ " szabályok.

A kenyértörés (torta, pizza, ...) feltalálása óta teljesen *ésszerű* (*racionalis*) *törtekről* beszélni: pl. a torta (cserépedény) $1/6$ része: 6 felé osztottuk. Ez után egészen világos, hogy ezeket a kicsi szeleteket "*hatodik*"-nak *neveztük* el, majd uzsonnástásánkba rakva *megszámoltuk*, hogy 5 ilyen darabot tettünk.²⁾

Nem tudom, hogy az ókori egyiptomi írnokok miért akartak mindent csak 1 számlálójú törtekkel felírni, pl. $\frac{5}{6}$ helyett $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ -t írtak. Talán kevés hely volt a drága

¹⁾ más nyelvterületen "*ein, zwei, drei,...*". De a lényeg: egy *bijekciót* adunk meg a tárgyak és $\mathbb{N} = \{\text{egy, kettő, három, ...}\}$ halmaz egy kezdő részhalmaza között.

²⁾ Egyetemi felvételi után már nem sokan emlékeznek arra, hogy az $\frac{5}{6}$ képletben $5 =$ "(meg)számláló", $6 =$ "(el)nevező" és – a törésvonal (*törtvonal*).

papiruszon, mert oda csak $\bar{2} + \bar{3}$ -t írtak. Mindenesetre jó sok fejtörést, máig megoldatlan problémát adtak a 19-21. századi matematikusoknak, bár bizonyos pizza-szeletelési feladatoknál hasznosabb a szokásos $\frac{a}{b}$ törtknél³⁾ (lásd például [w E hu], [w E en]).

Már az ókori görögök is találkoztak ezeknél bonyolultabb (valós) számokkal, pontosabban szakasz-hosszúságokkal. 25 kavicsot szépen el lehet helyezni egy $5 \cdot 5$ táblázatban, és ugyanúgy azonnal látszik, hogy egy 5 egység oldalhosszúságú négyzet egyenlő 25 kis egységnégyzettel. Az már kicsit elgondolkodtatóbb feladat, hogy 2 egységnégyzet területével mekkora oldalú, egyetlen négyzet területe egyezik meg. Erre Pitagorasz tétele adja a választ: egy egységnégyzet *átlója* a keresett négyzet oldala. Ezért is hívjuk ezt az átlót (szakaszt) a 2 terület *gyökerének*, röviden *gyökének*, és $\sqrt{2}$ -vel jelöljük⁴⁾, hasonlóan ahhoz, hogy a 25 terület gyökere az 5 oldalhosszúság. A térben térfogatot, vagyis *köbtartalmat* számolunk, és a déloszi (kockakettőzési) probléma ([w K hu]) : egy 2 *köbtartalmú* kocka élét keresi, vagyis $\sqrt[3]{2}$ -öt. És már meg is érkeztünk bármilyen *egész gyök* fogalmához: $\sqrt[k]{m} = x$ az a keresett szám, amelyre $x^k = x \cdot x \cdot \dots \cdot x = m$ ($k \in \mathbb{N}$, $x, m \in \mathbb{R}^+$).

Érdekességgéppen megjegyezzük, hogy már Eukleidész könyvében ([EE -300], [vW 1977]) bebizonyította, hogy bármely négyzet átlója és oldala *összemérhetetlen*⁵⁾, vagyis hányadosuk *nem racionális*.

Az eddig megismert számokat elemi számolásaink (négy alpművelet, ismételt szorzás azaz hatványozás és annak megfordítása [*inverze*]) segítségével fedeztük fel, vagyis az *algebrai műveletek* segítségével. Ezért nevezték el ezeket a számokat *algebrai számoknak*. Talán egyetért az Olvasó abban, hogy több egyszerű, "magától értetődő" műveletet és számot nem tudunk elképzelni. A többi valódi (*valós*) szám jelenlegi számolási képességeinken és az algebra eszközein *túli* számok, vagyis *transzcendens*

³⁾ Ha például 5 pizzát akarunk 8 személyre szétosztani, akkor a szokásos módszerrel $5 \cdot 8 = 40$ vágás. Azonban, egyiptomi törtekkel $5/8 = 1/2 + 1/8$, ami alapján mind a 8 személy egy fél és egy nyolcad szeletet kap, vagyis 4 pizzát félbevágunk (4 vágás) és egy pizzát 8 felé (8 vágás). Tehát 40 vágás helyett 12 vágással megússza a pizzafutár ([w E en]).

⁴⁾ A $\sqrt{\quad}$ jel állítólag egy kézzel írt, kicsit elkapkodott *r* betű kiegyenesített változata, hiszen latinul (és angolul) *root* jelentése *gyökér*, mind növénytanban mind matematikában. A gyökjel neve *radical* ($\Rightarrow$ radikális = gyökeres).

⁵⁾ Az ókori görögök még nem használtak sem valós számokat sem számegeyenest. A természetes számok kavicsok voltak (pl. "háromszög-számok"), a törtek helyett szakaszok *arányáról* beszéltek, és legfőképpen szakaszok hosszaival foglalkoztak. Két szakaszt, *a* és *b*, *összemérhetőnek* neveztek, ha létezik közös mértékegységük, azaz olyan *d* szakasz, amelyekre $a = k \cdot d$ és $b = \ell \cdot d$ ahol *k*, *ℓ* egész számok, vagyis $a/b = k/\ell$ racionális. (*d* így a *legnagyobb közös osztója* a tetszőleges pozitív valós *a*, *b* számoknak.) Tehát a $b = 1$ egységszakasszal *összemérhetetlen* szakaszok *irracionális* hosszúak.

számok⁶⁾. Az eddig ismertetett számok egészen egyszerűen lopták be magukat életünkbe (szívünkbe?), és érthető a folytatás:

1. Definíció. Az egész számokból kiindulva, a négy alpművelet $(+, -, \cdot, :)$ és az egész - gyökvonásokkal $(\sqrt[k]{}, k \in \mathbb{Z})$ felírható mennyiségeket **algebrai számoknak** nevezzük, a nem algebrai számok pedig **transzcendensek**. $\square$

Például a geometriában körzővel és vonalzóval (az egységszakaszból) *megszerkeszthető* szakaszok mind algebraiak, hiszen itt csak négyzetgyököt kell vonnunk.

A képzetes (*elképzel*⁷⁾) egység $i = \sqrt{-1}$ is algebrai, sőt a $z = a + bi$ *összetett* (komplex⁸⁾) szám pontosan akkor algebrai, ha a és b mindkettő algebrai. Tehát a Gauss-egészek ($a + bi$ ahol $a, b \in \mathbb{Z}$), Euler- (Eisenstein-) egészek ($a + b\rho$ ahol $\rho = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $a, b \in \mathbb{Z}$) is algebraiak. További példákat látunk még a következő fejezetben.

Könnyen belátható, hogy "mindössze" megszámlálható sok algebrai szám van (hiszen a természetes számokból kiindulva, a négy alpművelet és a k -dik gyökjelek segítségével előállított számokat szépen [végtelen] sorba tudjuk rendezni, és mind meg tudnánk számolni, ha végtelen sok időnk lenne), a valós számok halmaza pedig nem megszámlálható, hanem jóval több, *kontinuum*⁹⁾. Tehát a legtöbb valós szám transzcendens, algebrai eszközeinken *túl* van.

2. Polinomok

Tekintsük például a következő algebrai számot:

$$\beta = \sqrt{2} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{3} . \quad (1)$$

Tüntessük el a gyökjeleket:

$$\beta - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{2} - \sqrt{3} \quad / \quad ()^2$$

⁶⁾ *transz/transzcendens* = valamin túli, valamin keresztül, mint pl. transzformátor, "transzba esett" (valóságon túlra), Liszt Ferenc "Transzcendens etűdök" (zongorista képességein túli zongoraművek), stb.

⁷⁾ *imaginare* (lat) = *imagine* (ang) = elképzelni

⁸⁾ *komplex* = összetett, pl. nyelvvizsga

⁹⁾ "kontinuum" szó szerint "a folytonosság", hiszen a valós számegyenes minden (geometriai) pontját folytonosan kitöltik a valós számok. (Lásd még "continuous" angolul, vagy "kontinuitás elve" a politikában, stb.)

$$\beta^2 + (5 - 2\sqrt{6}) - 2\beta\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = 2 + 3 - 2\sqrt{6} ,$$

$$\beta^2 - 2\beta\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = 0 ,$$

$$\beta^2 = 2\beta\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \quad / ()^2$$

$$\beta^4 = 4\beta^2 \cdot (5 - 2\sqrt{6}) = 20\beta^2 - 8\beta^2\sqrt{6} ,$$

$$\beta^4 - 20\beta^2 = -8\beta^2\sqrt{6} \quad / ()^2$$

$$\beta^8 - 40\beta^6 + 400\beta^4 = 64 \cdot 6\beta^4$$

$$\beta^8 - 40\beta^6 + 16\beta^4 = 0 .$$

Tehát: β gyöke egy *egész együtthatójú*¹⁰⁾ polinomnak¹¹⁾! Sőt, nem túl nehéz belátni, hogy *minden*, egész számokból a négy alpművelettel és egész gyökökkel felírt kifejezés (szám) egy egész együtthatójú polinom gyöke!

Azonban ez fordítva sajnos nem igaz. Az Abel-Ruffini tétel¹²⁾ szerint *általános* gyökképlet nincs 5 vagy magasabbfokú algebrai egyenletek (polinomok gyökei) megoldására. A helyzet azonban még ennél is "szörnyűbb": rengeteg konkrét polinom konkrét gyökei (például $x^5 - 4x + 2$ vagy $x^5 - x - 1$ gyökei) sem írhatók fel gyökjelekkel ([FE 1981], [w A hu])!

Könnyen belátható, hogy egész együtthatójú polinomokból "csak" megszámlálhatóan végtelen van, ezért az Algebra Alaptétele alapján e polinomok (valós és komplex) gyökei is "csak" megszámlálhatóan végtelen sokan vannak.

Elérkeztünk egy nagy kérdéshez: melyik legyen az algebrai számok hivatalos definíciója? A következő fejezetben válaszolunk erre pontosan.

Például, mely számok gyökei egész együtthatójú polinomoknak?

A $z = a + bi$ Gauss számok ($a, b \in \mathbb{Z}$) gyökei a $z^2 - 2az + (a^2 + b^2)$ polinomnak, a $z = a + b\rho$ Euler- (Eisenstein-) egészek ($\rho = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $a, b \in \mathbb{Z}$) gyökei a $z^2 + (b - 2a)z + a^2 - ab + b^2$ polinomnak.

Racionális r esetén a $\cos(r\pi)$, $\sin(r\pi)$, $\tan(r\pi)$, $\cotan(r\pi)$ függvényértékek (radiánban mérve!) is egész együtthatójú polinomok gyökei (ha értelmezettek). Például $\cos(\pi/7)$, $\cos(3\pi/7)$, $\cos(5\pi/7)$ gyökei a $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$, $\tan(3\pi/16)$, $\tan(7\pi/16)$, $\tan(11\pi/16)$, $\tan(15\pi/16)$ pedig a $x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1$ polinomnak [w A en].

¹⁰⁾ együtt-ható = co-efficient (ang) = koefficiens (a bankban)

¹¹⁾ Nem tudom, miért hívják egy függvény gyökének (*gyökerének*) a zérushelyeit. 2-3-4 fokú polinomok ("soktagúak") esetében a zérushelyeket ki lehet fejezni gyökjelekkel, de magasabbfokú polinomok esetében már nem.

¹²⁾ A tétel bizonyításával Bolyai János is behatóan foglalkozott.

Nem egyszerű bizonyítani, de igaz: *Algebrai számok összege, különbsége, szorzata, és hányadosa (sőt racionális kitevőjű hatványai is) is algebrai, így testet alkotnak.* Sőt: *az algebrai együtthatós polinomok gyökei is algebrai számok* ([SE 2000], [Sz 2019b], [w A hu], [w A en]).

Lényeges, hogy π , e , $\lg(2)$ és még nagyon sok "ilyen" szám *nem* algebrai ([w T hu]). Egy érdekesség: *Ha $a \neq 0, 1$ és b algebrai számok, b irracionális, akkor a^b transzcendens* (például $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$).

Most pontosan definiáljuk az algebrai számok különböző halmazait.

3. Algebrai számok

Mi most az $\mathbb{A}$ jelet használjuk, bár sok helyen a $\bar{\mathbb{Q}}$ jelölés használatos. $\mathbb{Z}$ = egész-, $\mathbb{Q}$ = racionális-, $\mathbb{R}$ = valós-, $\mathbb{C}$ = komplex számok halmaza.

2. Definíció. $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}, \sqrt{}} := [\mathbb{Z} ; +, -, \cdot, \sqrt[3]{}]$ azon komplex számok halmaza, amelyek felírhatók egész számok, három alpművelet (osztás nélkül) és tetszőleges "egész" (azaz $y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) gyökjelek segítségével,

$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}, \sqrt{}} := [\mathbb{Q} ; +, -, \cdot, \div, \sqrt[3]{}]$ azon komplex számok halmaza, amelyek felírhatók racionális számok, négy alpművelet (osztás megengedett) és tetszőleges "egész" (azaz $y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) gyökjelek segítségével; ezeket a számokat **konstruálható számok**-nak is hívják,

$\mathbb{A}_{\mathbb{Z}[x]} := \{p(x) \text{ gyökei} : p(x) \in \mathbb{Z}[x], \text{ főegyüttható} = \pm 1\}$
 $a \pm 1$ főegyütthatójú¹³⁾, egész együtthatós polinomok (komplex) gyökeinek halmaza,

$\mathbb{A}_{\text{int}} := \mathbb{A}_{\mathbb{Z}[x]}$, amely számokat **algebrai egész számok**-nak hívunk,

$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}[x]} := \{q(x) \text{ gyökei} : q(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$

a racionális együtthatós polinomok (komplex) gyökeinek halmaza,

$\mathbb{A} := \mathbb{A}_{\mathbb{Q}[x]}$, amely számokat **algebrai számok**-nak hívunk. $\square$

Tehát $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}[x]}$ elemei az algebrai számok, és $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}[x]} \subsetneq \mathbb{A}_{\mathbb{Q}[x]}$ elemei az algebrai egész számok.

¹³⁾ Egy polinom **főegyütthatója** a legmagasabb fokszámú tagjának együtthatója.

3. Megjegyzés. i) Könnyen látható, hogy

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}, \sqrt{}} = [\mathbb{Z} ; +, -, \cdot, \div, \sqrt[3]{}] , \quad (2)$$

vagyis csak egész számokból is fel tudjuk építeni a konstruálható számokat, az osztás felhasználásával.

ii) Az is nyilvánvaló, hogy bármely $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ racionális együtthatójú polinomot az együtthatók nevezőinek c legkisebb többszörösével szorozva a kapott $p(x) = c \cdot q(x)$ polinom már egész együtthatójú, vagyis $\mathbb{Z}[x]$ -nek eleme. Ez azt jelenti, hogy a $\mathbb{Q}[x]$ -beli polinomok gyökeinek halmaza megegyezik a $\mathbb{Z}[x]$ -beli polinomok gyökeinek halmazával:

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}[x]} = \{p(x) \text{ gyökei} : p(x) \in \mathbb{Z}[x] \text{ (bármilyen főegyüttható)}\} .$$

A lényeges különbség $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}[x]}$ és $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}[x]}$ között az, hogy az $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}[x]}$ -beli (egész együtthatójú) polinomok főegyütthatójáról megköveteljük, hogy pontosan ± 1 legyen. Később látni fogjuk, hogy ez nem öncélú megkülönböztetés. Az olyan polinomokat, melyek főegyütthatója éppen ± 1 , angolul **monic** polinomoknak nevezzük. (Nyilván $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}[x]}$ -beli polinomok főegyütthatóira bármilyen egész vagy racionális számot előírhatunk, vagyis $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}[x]}$ -ben ez lényegtelen kérdés.)

A fentiek szerint $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}[x]} \subsetneq \mathbb{A}_{\mathbb{Q}[x]}$ (lásd még az 4. Tételt), és a bevezetésben említett β szám $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}[x]}$ -nak eleme. Továbbá, a [w A hu] és [w A en] honlapokon bőséges listákat találunk $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}[x]}$ és $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}[x]}$ elemeiről (algebrai és algebrai egész számokról), valamint $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}[x]}$ -ba nem tartozó számokról. Például, bármely $r \in \mathbb{Q}$ racionális számra $\sin(r\pi)$ és $\cos(r\pi)$ is algebrai számok (elemei $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}[x]}$ -nak).

iii) A fent definiált $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}, \sqrt{}}$ "konstruálható" számok halmaza nem azonos a "**kiszámítható**", vagy más néven "**rekurzív**" számok $\mathbb{K}$ halmazával. Ez utóbbi olyan valós számokat tartalmaz, amelyek valamely algoritmussal (számítógép programmal) tetszőleges pontossággal megadhatóak. Például π és e rekurzív de nem konstruálható számok, és nyilván $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}, \sqrt{}} \subsetneq \mathbb{K}$.

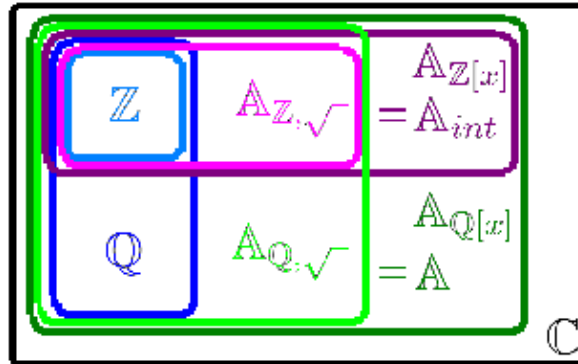
4. Tétel. i) $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{A}_{\mathbb{Z}, \sqrt{}} \subsetneq \mathbb{A}_{\mathbb{Z}[x]} \subsetneq \mathbb{A}_{\mathbb{Q}[x]} = \mathbb{A} \subsetneq \mathbb{K} \subsetneq \mathbb{C}$,

ii) $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}, \sqrt{}} \subsetneq \mathbb{A}_{\mathbb{Q}, \sqrt{}} \subsetneq \mathbb{A}_{\mathbb{Q}[x]} = \mathbb{A}$,

iii) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}, \sqrt{}}$ és $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}[x]}$ gyűrűk (azaz zártak az összeadásra, kivonásra és szorzásra),

iv) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}, \sqrt{}}$, $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}[x]}$ és $\mathbb{K}$ testek (azaz zártak a négy alapműveletre). $\square$

5. Megjegyzés. A fenti i) és ii) összefüggéseket az alábbi ábra szemlélteti, sajnos $\mathbb{K}$ nem szerepel rajta. Az ábra nem "méretarányos", mert mindegyik $\mathbb{A}_*$ halmaz és $\mathbb{K}$ is megszámlálhatóak (vagyis ugyanannyi elemük van, mint $\mathbb{N}$ -nek), $\mathbb{C}$ pedig kontinuum számosságú.



4. Alkalmazások

Most csak azon alkalmazásokat említjük meg, amelyek a szerző szívéhez közel állnak, sorrend nélkül.

4.1. Közelítő számítások

Napjainkban a numerikus (közelítő) számítások előtérbe kerülnek az elméleti "pontos" megoldásokkal szemben. Az algebrai számok hiába vannak mindenütt sűrűn a valós számegyenesen (bármely kis intervallumban végtelen sok algebrai szám van), de van "bonyolultságuk", hasonlóan az *irreducibilis tört* számok¹⁴⁾ nevezőjéhez. Például, ha az $\frac{x}{n}$ és $\frac{y}{n}$ számok *közelítő alakjából* szeretnénk eldönteni a két szám egyenlőségét, akkor ezt az $\frac{x}{n}$ és $\frac{y}{n}$ számok kb. $\frac{1}{2n}$ -nél pontosabb kiszámításával el tudjuk dönteni.

A törtek nevezőihez hasonlóan az algebrai számoknak (egész együttthatós polinomok gyökeinek) is van "bonyolultsága", ami alapján például egyenletek gyökeinek közelítő értékeiből is meg lehet határozni a gyökök azonosságát vagy különbözőségét.

¹⁴⁾ A tovább nem egyszerűsíthető törteket, vagyis amikor a számláló és a nevező relatív prímek, nevezzük **irreducibilis törtek**nek. Minden tört (racióális szám) egyenlő pontosan egy irreducibilis törttel.

Például, szokásos középiskolai átalakításokkal belátható, hogy $\sqrt{2} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{3}$, azaz az (1) -ben említett szám esetében $\beta = 0$. A diákok kedvenc módszere a tanár bosszantására: "*kiszámoltam zsebszámológéppel, és nulla*". Nos, mivel β "bonyolultsága" legalább (16; 22), ezért $|\beta| < 6.3 \cdot 10^{-39}$, valóban elég egy olyan számológép, amely legalább 41, tizedesjegy pontossággal tud számolni! Ha ennyi tizedesjegy valóban 0, akkor $\beta = 0$ valóban, egzakt matematikai értelemben, nem csak numerikus közelítéssel! (Részletek például az [SE 2000] és [Sz 2019b] cikkekben találhatók.)

Egy másik alkalmazást [BLR 2015] cikkben ismerhetünk meg közelebbről: *Bozóki Sándor, Tsung-Lin Lee és Rónyai Lajos* hasonló módszerrel igazolták John Edensor Littlewood 1968-ban megjelent sejtését: lehetséges *hét* (elegendően hosszú) azonos átmérőjű hengert elhelyezni a térben úgy, hogy mindegyik érintse mindegyiket.

Érdemes még elolvasni **Grätzer József** [GJ 1935] könyvének 115. és 233. oldalait.

4.2. Rugalmas pénzérmék

Ha feldobunk *kétszer* egy olyan pénzérmét, ami $p_3 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$ valószínűséggel fej és $1 - p_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ valószínűséggel írás, akkor annak a valószínűsége, hogy egy írást és egy fejet dobunk:

$$P_{\bullet\bullet,\bullet\bullet} = 2p_3(1 - p_3) = 2 \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \cdot \frac{3 - \sqrt{3}}{6} = \frac{1}{3}, \quad (3)$$

míg háromszor feldobva ugyanezt az érmét, annak a valószínűsége, hogy három írást vagy három fejet dobunk:

$$P_{\bullet\bullet\bullet,\bullet\bullet\bullet} = p_3^3 + (1 - p_3)^3 = \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{6}\right)^3 + \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)^3 = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Úgy is fogalmazhatunk, hogy a fenti egyetlen pénzérmével *szimulálhatjuk* mind a szabályos $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, mind az $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ valószínűségű fej-írás pénzérméket! Röviden $p_3 \rightsquigarrow \frac{1}{2}$ és $p_3 \rightsquigarrow \frac{1}{3}$.

A "szimulálni" relációt ($\rightsquigarrow$) pontosan az [Sz 2019a] és [SzV 1992] cikkekben definiáljuk, most csak egy egyszerűbb (általánosított) meghatározást adunk.

6. Definíció. *Tetszőleges p, r valós számokra p szimulálja r -et, jelben $p \rightsquigarrow r$, ha van olyan $u(x)$ nemnegatív egész együtthatójú polinom, amelyre $u(p) = r$.* $\square$

Nyilván, ha $p \rightsquigarrow r, s$ akkor $p \rightsquigarrow r + s$ és $p \rightsquigarrow r \cdot s$.

Az igazi "artistamutatvány" az, ha egy p valós számmal egyszerre több valós számot is tudunk szimulálni (azaz $u(p) = r$ és $v(p) = s$ valamely u, v polinomokra)! [SzV 1992] és [SzV 1993] -ban belátják a szerzők, hogy *pozitív racionális* számok tetszőleges véges részhalmaza mindig szimulálható egyetlen pozitív p valós számmal.

Azonban például $\sqrt{2}$ és π egyszerre nem szimulálható egyazon p számmal. Ugyanis, ha $u(p) = \sqrt{2}$ valamely $u(x)$ egész együtthatójú polinomra, akkor p algebrai. Ekkor viszont $v(p) = \pi$ nem lehet, mert $v(p)$ algebrai, míg π transzcendens.

Könnyen kijelenthetnénk, hogy $u(p) = r$ és $v(p) = s$ esetén p, r és s "ugyanazon algebrai fokú" számok kellenek, hogy legyenek. De ennek precíz megfogalmazása és alkalmazása nagyon nehéz.

Már több, mint 30 éve megoldatlan a következő probléma:

7. Probléma. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $\frac{1}{\sqrt{3}}$ szimulálhatóak egyszerre, azaz léteznek-e olyan $u(x)$ és $v(x)$ nemnegatív egész együtthatójú polinomok és olyan p valós szám, amelyekre $u(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ és $v(p) = \frac{1}{\sqrt{3}}$? $\square$

5. Irodalom

[BLR 2015] **Bozóki Sándor, Tsung-Lin Lee, Rónyai Lajos:** *Seven mutually touching infinite cylinders*, Computational Geometry 48 (2015), 87 - 93.

[EE -300] **Eukleidész:** *Elemek* (magyarul): Gondolat Kiadó, 1977,
<http://mek.oszk.hu/06200/06232> (pdf) , <http://mek.oszk.hu/00800/00857> (html) ,
<http://mek.iif.hu/06200/06232>

[FE 1981] **Fried Ervin:** *Általános algebra*, Tankönyvkiadó, 1981.

[GJ 1935] **Grätzer József:** *Rébusz* (1935).

[LL 1986] **László Lovász:** *An Algorithmic Theory of Numbers*, SIAM 1986.

[PJ 1998] **Pelikán József:** *Algebra*, összeállította Gröller Ákos,
<http://www.cs.elte.hu/~pelikan/algebra.html>

[SE 2000] **Edward R. Scheinerman:** *When close enough is close enough*, American Math. Monthly 2000, June-July, 489-499.

[Sz 2019a] **Szalkai István:** *Rugalmas pénzérmék és algebrai számok*, Haladvány-Kiadvány, 2019.12.28., <http://www.math.bme.hu/~hujter/halad>

[Sz 2019b] **Szalkai István:** *Számológéppel gyökök ellen*, Haladvány-Kiadvány, 2019.12.30., <http://www.math.bme.hu/~hujter/halad>

[SzV 1992] **Szalkai István, Dan Velleman:** *Rugalmas pénzérmék*, Matematikai Lapok, 1992, 23-38.

[SzV 1993] **Szalkai István, Dan Velleman:** *Versatile coins*, Am.Math. Monthly 100, (1993), 26-33.

[vW 1977] **van der Waerden, B.L.:** *Egy tudomány ébredése*, Gondolat, 1977.

[w A hu] **Wikipédia:** *Algebrai szám*, https://hu.wikipedia.org/wiki/Algebrai_szám

[w A en] **Wikipedia:** *Algebraic number*, https://en.wikipedia.org/wiki/Algebraic_number

[w E hu] **Wikipédia:** *Racionális számok - Egyiptomi törtek*, https://hu.wikipedia.org/wiki/Racionális_számok#Egyiptomi_törtek

[w E en] **Wikipedia:** *Egyptian fractions*, https://en.wikipedia.org/wiki/Egyptian_fraction

[w K hu] **Wikipédia:** *Kockakettőzés*, <https://hu.wikipedia.org/wiki/Kockakettőzés>

[w T hu] **Wikipédia:** *Transzcendens számok*, https://hu.wikipedia.org/wiki/Transzcendens_számok