

A tepsi nem csonkagúla

dr. Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém,
SZALKAI.ISTVAN@MIK.UNI-PANNON.HU

2025.08.27.

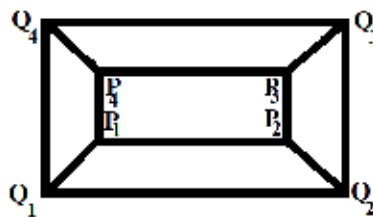
HALADVA'NY KIADVA'NY 250827.
<http://math.bme.hu/~hujter/250827.pdf>
<https://math.bme.hu/~hujter/halad.htm>

A probléma

[N] -ben találtam a következő feladatot: "A képen látható, csonkagúla ('Pyramidenstumpf', [w P de]) alakú sütőforma méretei: felső téglalap oldalai 25 és 11cm, alsó téglalap oldalai 22 és 8cm, a magassága 7,5cm. Számolással ellenőrizze, hogy térfogata $1677,5\text{cm}^3$."



1.ábra: Tepsi



2.ábra: Tepsi élgráfja

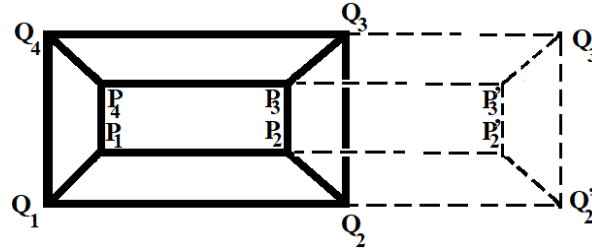
Bár a csonkagúla térfogatképletével

$$V_{csg} = \frac{m}{3} \cdot (t + \sqrt{tT} + T) \quad (1)$$

valóban pontosan kijön a megadott eredmény: $V = \frac{7.5}{3} (25 \cdot 11 + \sqrt{25 \cdot 11 \cdot 22 \cdot 8} + 22 \cdot 8) = 1677.5 \text{ cm}^3$, de első igazi problémánk:

1. Probléma: A fenti test *nem csonkagúla*! Hát akkor mi? Mi a pontos képlet ezen testek térfogatára? Milyen testekre működik az (1) képlet?

A tepsik általában nem csonkagúlák, hiszen, ha például "kihúzzuk", azaz meghosszabbítjuk a Q_1Q_2 , $P_1P_2, \dots$ éleket, akkor az $M_{1,4} = Q_1P_1 \cap Q_4P_4$ és $M_{2,3} = Q_2P_2 \cap Q_3P_3$ metszéspontok egymástól a $Q_2Q'_2$ távolsággal mozdulnak el, vagyis csak egyetlen esetben lehet $M_{1,4} = M_{2,3}$, vagyis a tepsi csonkagúla.



3.ábra: *Tepsi kihúzva*

A 3. Tétel pontosan válaszol erre a kérdésre.

A következő fejezetben elemezzük, általánosítjuk és megoldjuk ezt a problémát, sok közismert tétel egyszerű bizonyítását is ismertetjük.

Azonban a legutolsó fejezetben egy még nagyobb problémával találjuk magunkat szemben, amit a Szerző a mai napig nem tudott megoldani! Cikkünket és ezt a megoldatlan problémát elsősorban középiskolai tanároknak ajánljuk.

Megoldás

1. Definíció. i) Egy (térbeli) poliédert **semi-trapezo-pipedon-nak**¹⁾ (*Stp*), magyarul **ál-tértrapéz-nak** (ÁTT) nevezünk, ha

o) alap- és fedőlapja az $e_1, \dots, e_n$ illetve az $f_1, \dots, f_n$ élekkel határolt sokszögek, amik párhuzamos síkokban fekszenek,

oo) $e_i \parallel f_i$ és az e_i és f_i élek csúcspontjai egy trapéz alakú oldallapját alkotják a testnek $i = 1, \dots, n$ esetén.

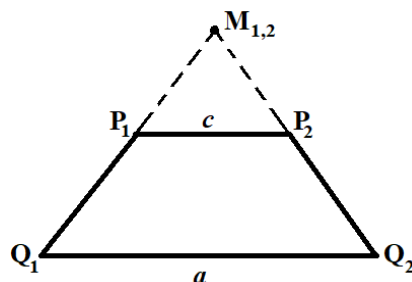
ii) Ha az alap- és fedőlapok téglalapok, akkor a testet **tepsinek** (balkonládának,...) nevezzük. $\square$

[w P en] szerint a fenti testeket **prismoid**-nak nevezik. A csonkagúlán természetesen ÁTT-ek is. Nyilván az o) - oo) feltételek általánosíthatók, mi csak a fenti speciális esettel foglalkozunk.

A párhuzamos szelők tételének egyenes következménye:

2. Állítás. Ha a trapéz nem (feltétlenül) párhuzamos oldalak metszéséspontja M , akkor

$$MP_1 : MQ_1 = MP_2 : MQ_2 = \frac{c}{a} \quad . \quad \square$$



4.ábra: Trapéz oldalainak metszéséspontja

Ez alapján már könnyen belátható az első tepsiproblémánkat megoldó összefüggés.

3. Tétel. Egy ál-tértrapéz pontosan akkor csonkagúla ha az alaplapp és fedőlap hasonlóak de nem egybevágók.

Bizonyítás. Ha a test csonkagúla, akkor az alap- és fedőlap (térbeli) hasonlósága nyilvánvaló.

¹⁾ a "paralelepipedon" elnevezés mintájára

Megfordítva: legyen a hasonlóság aránya λ , vagyis legyen $\frac{e_i}{f_i} = \lambda (>1)$ és legyenek az alap- és fedőlap csúcsai Q_i és P_i ($i = 1, \dots, n$) úgy, hogy $e_i = Q_i Q_{i+1}$ és $f_i = P_i P_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$) és $e_n = Q_n Q_1$, $f_n = P_n P_1$.

Most csak a $\lambda \neq 1$ esettel foglalkozunk. Azt kell belátnunk, hogy a $Q_i P_i$ oldalélek egyetlen M (térbeli) pontban metszik egymást. Ehhez elég belátnunk, hogy az $M_{i,i+1} := Q_i P_i \cap Q_{i+1} P_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$) és az $M_{n,1} := Q_n P_n \cap Q_1 P_1$ metszéspontok egybeesnek.

Az $M_{i-1,i}$ és $M_{i,i+1}$ ($i = 2, \dots, n-1$) metszéspontok mindketten a $Q_i P_i$ él egyenesére illeszkednek. Az 2. Állítást alkalmazzuk a $Q_{i-1} P_{i-1} Q_i P_i$ és a $Q_i P_i Q_{i+1} P_{i+1}$ trapéz oldallapokra, mely szerint $M_{i-1,i} P_i : M_{i-1,i} Q_i = \lambda = M_{i,i+1} P_i : M_{i,i+1} Q_i$, vagyis az $M_{i-1,i}$ és $M_{i,i+1}$ metszéspontok megegyeznek, és ugyanígy látható még be, hogy $M_{n,1} = M_{1,2}$. ■

Az eredeti [N] feladatban $\frac{25}{11} \approx 2.272 \neq \frac{22}{8} \approx 2.75$, tehát ez a tepsi *nem* csonkagúla!

Következő kérdésünk: milyen általános testekre igaz az (1) képlet?

Meglepődtünk, amikor felfedeztük: már *tepsikre sem* igaz !

[w P en] -ben a következő térfogatképlet van :

$$V_{prismoid} = \frac{m}{6} \cdot (t + 4\tau + T) \quad (2)$$

ahol τ az alap- és fedőlappal párhuzamos, a magasságot felező sík és test metszetének területe.

Négyzetes (=hasonló) csonkagúláknál esetén $T = a^2$, $t = b^2$, $\tau = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, így (1) igaz:

$$\begin{aligned} V_{prismoid} &= \frac{m}{6} (t + 4\tau + T) = \frac{m}{6} \left(a^2 + 4 \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + b^2 \right) = \frac{m}{6} (a^2 + (a^2 + 2ab + b^2) + b^2) = \\ &= \frac{m}{3} (a^2 + ab + b^2) = \frac{m}{3} \left(a^2 + \sqrt{a^2 b^2} + b^2 \right) = \frac{m}{3} (t + \sqrt{tT} + T) . \end{aligned}$$

Sőt, *tetszőleges* csonkagúláknál is igaz (1), mivel hasonló síkidomokról van szó: $fedőlap = alaplap \cdot \lambda$, $metszet = alaplap \cdot \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)$, így $t = \lambda^2 \cdot T$, $\tau = \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^2 \cdot T$ és

$$\begin{aligned} V_{prismoid} &= \frac{m}{6} (t + 4\tau + T) = \frac{m}{6} \left(t + 4 \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^2 \cdot T + T \right) = \frac{m}{6} (t + (1 + 2\lambda + \lambda^2) \cdot T + T) \\ &= \frac{m}{6} (2t + 2\lambda T + 2T) = \frac{m}{3} (t + \lambda T + T) = \frac{m}{3} (t + \sqrt{tT} + T) \end{aligned}$$

$$\text{mivel } \lambda T = \sqrt{\lambda^2 T^2} = \sqrt{\lambda^2 T \cdot T} = \sqrt{tT}.$$

Azonban, már *nem hasonló téglalapok* esetén sem igaz (1): legyenek az *alaplapp* élei e_1, e_2 , *fedőlap* élei f_1, f_2 , közbülső *metszet* élei $\frac{e_1+f_1}{2}$, $\frac{e_2+f_2}{2} \Rightarrow$ metszet területe $\tau = \frac{e_1+f_1}{2} \cdot \frac{e_2+f_2}{2} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} V_{prismoid} &= \frac{m}{6} \cdot (t + 4A_2 + T) = \frac{m}{6} \cdot \left(e_1 \cdot e_2 + \frac{4}{4} \cdot (e_1 + f_1) \cdot (e_2 + f_2) + f_1 \cdot f_2 \right) = \\ &= \frac{m}{6} \cdot (2e_1e_2 + e_1f_2 + e_2f_1 + 2f_1f_2) = \frac{m}{3} \cdot \left(e_1e_2 + \frac{e_1f_2+e_2f_1}{2} + f_1f_2 \right) = \end{aligned}$$

$$\boxed{V_{tepsi} = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \frac{e_1f_2 + e_2f_1}{2} + t \right)}.$$

Mikor egyezik meg (1) a fenti képlettel?

$$\Leftrightarrow \frac{e_1f_2+e_2f_1}{2} = \sqrt{tT} = \sqrt{e_1e_2f_1f_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} \cdot (e_1f_2 + e_2f_1)^2 = e_1e_2f_1f_2$$

$$\Leftrightarrow e_1^2f_2^2 + 2e_1e_2f_1f_2 + e_2^2f_1^2 = 4e_1e_2f_1f_2$$

$$\Leftrightarrow e_1^2f_2^2 - 2e_1e_2f_1f_2 + e_2^2f_1^2 = (e_1f_2 - e_2f_1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow e_1f_2 - e_2f_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e_1}{e_2} = \frac{f_1}{f_2} \quad \Leftrightarrow \quad \text{alap- és fedőlap hasonlóak! } \square$$

TEHÁT: az eredeti érettségi feladat megoldása hibás, a *pontos* megoldás:

$$V_{tepsi} = \frac{m}{3} \left(T + \frac{e_1f_2+e_2f_1}{2} + t \right) = \frac{7.5}{3} \left(25 \cdot 11 + \frac{25 \cdot 8 + 11 \cdot 22}{2} + 22 \cdot 8 \right) = 1680 \neq 1677.5 \text{ cm}^3.$$

A Nagy Probléma

Hogyan oktassuk ezt diákoknak? A tepszi gyakorlati probléma, foglalkozni kell vele. Talán már a csonkagúla térfogatképlete is elég bonyolult sok diáknak, de hibás képletet nem taníthatunk! Mindenképpen fel kell hívunk a diákok figyelmét a képletek korlátaira, és a becslés ábrákra, térbeli testekre. Talán ebben a cikkben tárgyalt eset jó szemléltetés lehet az oktatásban.

Várom a tanár kollégák észrevételeit.

Irodalom

[N] *Német érettségi feladat:*

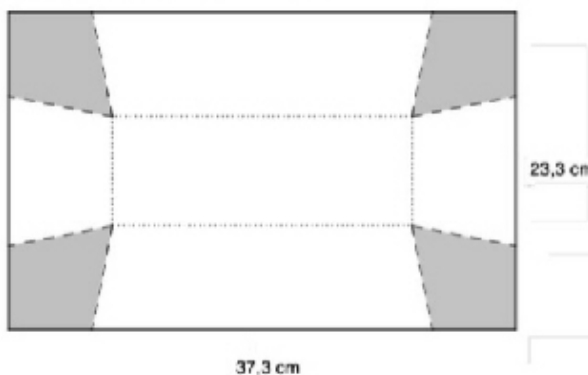
Wahlaufgabe 1:

Kuchen werden in Formen aus Blech gebacken, welche die Form eines geraden Pyramidenstumpfs mit rechteckiger Grundfläche haben (siehe Abbildung). Die Form hat die Maße:

Länge oben: 25,0 cm
Länge unten: 22,0 cm
Breite oben: 11,0 cm
Breite unten: 8,0 cm
Höhe: 7,5 cm



- a) Bestätigen Sie rechnerisch, dass das Volumen der Kuchenform $1677,5 \text{ cm}^3$ beträgt.
- b) Die Form wird bis zur halben Höhe mit Teig gefüllt.
Begründen Sie anschaulich, dass der Teig weniger als die Hälfte des Volumens der Form ausfüllt und bestätigen Sie diese Behauptung durch eine Rechnung.
- c) Die Form wird aus einem rechteckigen Blech hergestellt, das 37,3 cm lang und 23,3 cm breit ist. Zur Herstellung werden an den Ecken die in der Abbildung grau dargestellten Flächen aus dem Blech ausgeschnitten.



Bestimmen Sie das Gewicht der Kuchenform, wenn 1 cm^2 des Blechs 0,157 g wiegt.

[w P en] **Wikipedia:** *Prismatoid*, <https://en.wikipedia.org/wiki/Prismatoid>

[w P de] **Wikipedia:** *Pyramidenstumpf* ("Csonkagúla")
<https://de.wikipedia.org/wiki/Pyramidenstumpf>