A Rubik kocka matematikájáról – 46 év után újra

Kéri Gerzson

I. rész. Áttekintés

1. Bevezetés

A munkának ennek az I. részében csak a 3x3x3 méretű Rubik-kockával foglalkozunk részletesen, de néhány helyen érintőlegesen szó lesz más méretű Rubik-kockákról is.

A KöMal kérésére 1980-ban készítettem egy írást „A bűvös kocka matematikája” címmel, amely két részletben, a folyóirat 60. kötetének 3. és 5. számában jelent meg. Azóta igen nagyot változott a világ. A változásnak egy apró eleme, hogy a mindennapi életben a *bűvös kocka* elnevezés helyére egyre inkább a *Rubik-kocka* elnevezés lépett. Sokkal lényegesebb változás, hogy az egyre nagyobb teljesítményű elektronikus számítógépek bevetésével, majd az utóbbi években színre lépett mesterséges intelligencia igénybevételével ma már sokkal többet tudunk a Rubik-kockáról, mint 46 évvel ezelőtt. Jól példázza ezt az Isten algoritmusának kérdése: 46 évvel ezelőtt még reménytelennek tartottam, hogy akár csak azt is meg tudja határozni az ember, legfeljebb hány lépés szükséges a Rubik-kocka kirakásához; más szavakkal kifejezve, ez a kérdés akkor még megoldatlan probléma volt. Isten algoritmusa elnevezéssel egy olyan hipotetikus, tökéletes eljárást fogalmaztak meg, amely bármilyen kevert pozícióból a lehető legrövidebb lépéssorozatban oldja meg a kockát. Az első figyelemre méltó eredmények ebben az irányban 1995-1997 között születtek. Ezek között kiemelkedő Richard E. Korf 1997-es eredménye, aki a pattern database-ekre épülő IDA algoritmussal elsőként határozott meg optimális megoldásokat véletlenszerűen választott Rubik-kocka-állapotokra. Az algoritmus elvileg bármely állapot esetében az optimális megoldás megtalálására alkalmas. Korf próbaképpen tíz véletlenszerűen generált állapotot vizsgált; ezek optimális megoldásai közül a leghosszabb 18 lépésből állt. Azt viszont Korf még nem tudta megállapítani, hogy a legrosszabb esetben hány lépésből áll ez az algoritmus. Jóval később, egy kutatócsoport (Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson és John Dethridge) a 2010-ben bejelentett, majd 2013-ban publikált eredményükben szuperszámítógépek segítségével bebizonyította, hogy a kocka mind a 43 trillió (pontosabban 43×10^{18}) lehetséges állásából legfeljebb 20 lépésből kirakható. Tehát ennyi, azaz 20 – a 3x3x3 méretű Rubik-kockára vonatkozó *Isten száma.*

A mesterséges intelligencia szerepét azzal szeretném alátámasztani, hogy ezt a cikket is majdnem teljes terjedelmében a mesterséges intelligencia, pontosabban fogalmazva a ChatGPT használatával készítettem, a ChatGPT-től kapott nyersanyagot alaposan kiegészítve és stilizálva**.** Tehát az MI eszközként vett részt az anyaggyűjtésben és a szövegezésben, ugyanakkor a végső matematikai tartalomért és annak ellenőrzéséért a szerző vállal felelősséget**.**

2. A Rubik-kockához kapcsolható matematikai tudományterületek

A Rubik-kocka mögött meglepően gazdag matematika húzódik meg: csoportelmélet, permutációelmélet, kombinatorika, gráfelmélet, számelmélet, algoritmuselmélet, valószínűségszámítás és számításelmélet is kapcsolódik hozzá. A továbbiakban először a használt rövidítéseket magyarázzuk, azt követően egy kis ízelítőt adunk a felsoroltak matematikai tárgyakhoz való kapcsolatáról.

Jelölések

A kocka lapjainak jelölésére a K (kelet), N (nyugat), F (fent), L (lent), S (szemközt), T (túloldalt) jelöléseket használjuk. A forgatások leírására ugyanezeket a nagybetűket lehet használni

- kiegészítő jelek nélkül, ha az illető lap felől nézve az órajárással egyező irányban végzett negyed fordulatra,
- aposztróf jellel (K', N' stb.) az órajárással ellentétes negyed fordulatra,
- 2 kitevővel (K^2, N^2 stb.) a fél fordulatra alkalmazott jelölés.

A Rubik-kocka, mint algebrai struktúra

A legfontosabb matematikai modell az, hogy a Rubik-kocka egy véges csoportot alkot.

Legyen G a 3×3×3-as kocka valamennyi elérhető állapotának halmaza. Egy-egy lapfordítás — például

$$F,\ \ L,\ \ N,\ \ K,\ \ T,\ \ S$$

— egy permutációt jelent a kocka elemein.

A mozdulatok egymás után végrehajthatók, ezért kompozíciójuk is egy megengedett transzformáció, és minden mozdulatnak van inverze. Így:

$$G = [F,\ L,\ K,\ N,\ S,\ T]$$

egy véges, nem kommutatív csoport.

A Rubik-kocka egyik legszebb matematikai tulajdonsága éppen az, hogy egy nagyon konkrét fizikai játék természetes módon vezet el az absztrakt csoportelmélethez.

A Rubik-kocka állapotainak száma – kombinatorika és permutációk

A 3×3×3-as kockának

$$43\ 252\ 003\ 274\ 489\ 856\ 000,$$

vagyis körülbelül

$$4{,}3252\times10^{19}$$

elérhető állapota van

Ez nem egyszerűen 20! vagy valamilyen egyetlen faktoriális, mert a sarokelemek és élkockák permutációira, illetve orientációjára külön-külön feltételek vonatkoznak.

Ezért a megvalósítható állapotok számát megadó képlet:

$$8!\,3^7\cdot12!\,2^{11}\cdot1/2.$$

Ennek magyarázata:

- 8!: a nyolc sarokkocka permutációja;
- 3^7: a sarokkockák orientációja;
- 12!: a tizenkét élkocka permutációja;
- 2^{11}: az élkockák orientációja;
- 1/2: a permutációk paritására vonatkozó korlátozás.

Érdekes következmény: A kocka nem minden fizikailag elképzelhető színezett konfigurációja érhető el legális forgatásokkal. Például egyetlen sarokkockát önmagában nem lehet elcsavarni úgy, hogy minden más változatlan maradjon. Ugyanígy nem lehet egyetlen élkockát önmagában megfordítani. (Ezek a jelenségek a csoport invariánsaival magyarázhatók.)

Invariánsok

A Rubik-kocka egyik érdekes matematikai tanulsága, hogy az elérhető állapotokra három alapvető kényszerfeltétel vonatkozik:

Sarokorientáció: A nyolc sarokkocka orientációjának összege modulo 3 mindig 0. Ezért az utolsó sarokkocka orientációját az első hét már meghatározza.

Élorientáció: A tizenkét élkocka orientációinak összege modulo 2 mindig 0. Ezért az utolsó él orientációja is meghatározott.

Paritás: A sarokkockák és az élkockák permutációinak paritása azonos. Ez magyarázza, miért nem lehet például két élkockát egyszerűen felcserélni úgy, hogy minden más elem változatlan maradjon.

Ez a három korlátozás lényegében meghatározza a 3×3×3 kocka klasszikus állapotterét.

Permutációcsoportok

A Rubik-csoport különösen szép módon írható le az

$$S_8,\quad S_{12}$$

szimmetrikus csoportok segítségével.

A sarokkockák az S_8, az élkockák a S_{12} permutációi szerint mozognak, miközben az orientációs komponensek is jelen vannak.

A teljes csoport nagysága:

$$|G|=8! \cdot 3^7 \cdot 12! \cdot 2^{11} / 2.$$

Ez az egyik legklasszikusabb példája annak, amikor a kombinatorikus állapottér és a csoportelméleti struktúra ugyanazt a matematikai objektumot két különböző szemszögből írja le.

A Singmaster [8] kiadványban felsorolt néhány nevezetes permutációcsoport, mint a teljes állapottérhez tartozó

$$G = [F,\ L,\ K,\ N,\ S,\ T]$$

csoport részcsoportjai a következők:

- slice group (szeletcsoport): [FL', KN', ST']
- slice-squared group (négyzetes szeletcsoport: $[F^2L^2, K^2N^2, S^2T^2]$
- two squares group (két 180°-os fordítás csoportja $[F^2, K^2]$
- antislice group (antiszeletcsoport): [FL, KN, ST]
- two generator group (kétgenerátoros csoport): [F, K]

Gráfelmélet: a Rubik-kocka, mint Cayley-gráf

A kocka állapotai tekinthetők egy gráf csúcsainak. Két csúcs között él van, ha az egyik állapotból a másik egyetlen megengedett lapfordítással elérhető.

Ez a gráf a csoport egy Cayley-gráfja.

Ebben a modellben:

- csúcs = kockaállapot,
- él = megengedett fordítás,
- út = mozdulatsor,
- legrövidebb út = optimális megoldás,
- távolság = szükséges minimális lépésszám,
- átmérő = Isten száma.

Ezért az Isten száma valójában egy gráfelméleti átmérőproblémaként is felfogható.

Különböző metrikák

Az Isten számára, azaz a Cayley-gráf átmérőjére megadott érték akkor egyértelmű, ha megmondjuk, mit tekintünk egy lépésnek. Erre két egyformán jogos lehetőség van:

a) Fél fordulat metrika: HTM az angol nyelvű megfelelő kifejezés rövidítéseként. Ebben a metrikában K, K′ és K^2 egyaránt 1 lépésnek számít. A Rubik-kocka művelőinek a többsége

ennek a metrikának megfelelően értelmezi a lépés fogalmát. Ebben a metrikában Isten száma $G_{3\times3\times3} = 20$.

b) Negyed fordulat metrika: QTM az angol nyelvű megfelelő kifejezés rövidítéseként. Ebben a metrikában a 90°-os fordítás 1, a 180°-os fordítás 2 lépésnek számít. A Rubik-kocka művelőinek egy nem elhanyagolható kisebbsége ennek a metrikának a használatát tartja helyesebbnek. Ilyen értelmezésben Isten száma = 26.

A két különböző értelmezésnek két különböző Cayley-gráf felel meg, melyek átmérője 20, illetve 26.

Isten algoritmusa és Isten száma

Röviden megismételjük a korábban már mondottakat:

Isten száma: a legrosszabb esetben szükséges minimális lépésszám, melynek értékére bebizonyították, hogy Isten száma HTM metrikában 20-szal egyenlő.

A bizonyítás érdekessége annak felismerése, hogy fölösleges mind a $8! \cdot 3^7 \cdot 12! \cdot 2^{10} / 2$. állapothoz megtalálni az egyenkénti optimális megoldást. A kutatók koszetekre bontották az állapotteret, majd szimmetriákat használtak a számítás drasztikus csökkentésére.

Koszetek és részcsoportok

Ez már kifejezetten csoportelméleti terület.

Az Isten száma bizonyításában az összes állapot csoportjának fontos részcsoportja a

$$H = \langle F, S^2, K^2, L, T^2, N^2 \rangle.$$

részcsoport. Az összes állapotot ennek a részcsoportnak a koszetjeire bontották. A teljes

43 252 003 274 489 856 000

állapotból így 2 217 093 120 koszet keletkezett, amelyek mindegyike 19 508 428 800 állapotot tartalmaz. A szimmetriák további alkalmazásával mindössze 55 882 296 reprezentáns esetet kellett ténylegesen vizsgálni. Ez szép példája annak, amikor az absztrakt algebra közvetlenül számítási algoritmust tesz lehetővé.

Számelméleti vonatkozások

A Rubik-kocka nem klasszikus értelemben vett számelméleti probléma, de több érdekes számelméleti jelenség is kapcsolható hozzá.

Permutációk rendje

Egy kockaállapothoz hozzárendelhető egy permutáció rendje:

$$\mathrm{ord}(g) = \min\{k > 0 : g^k = e\},$$

ahol *e* - a rendezett kockaállapotot jelenti. Ez tehát annak a legkisebb pozitív k számnak felel meg, amely után az adott mozdulatsor ismétlése visszahozza a kockát a kiindulási állapotba. A permutációk rendjének meghatározása az elemek ciklushosszainak legkisebb közös többszörösével kapcsolatos. Ha például egy permutáció ciklusai 3-as és 4-es hosszúságúak, akkor a rendje lcm(3,4) = 12.

Algoritmusok és számítástudomány

A Rubik-kocka fontos algoritmikai probléma is. A feltehető kérdések egyebek között:

1. Megoldható-e egy adott állapot?
2. Találjunk egy megoldást!
3. Találjuk meg a legrövidebb megoldást!
4. Milyen gyorsan található meg?
5. Hogyan tároljuk hatékonyan az állapotokat?

A gyakorlatban az algoritmusok elméletének különböző módszereit lehet alkalmazni ezeknek a kérdéseknek a megválaszolására, kéréseknek a végrehajtására. A klasszikus Kociemba-féle kétfázisú algoritmus különösen fontos. Bár nem feltétlenül garantálja minden esetben az optimális megoldást, viszont rendkívül gyorsan talál nagyon rövid megoldásokat.

Heurisztikák és minta adatbázisok

Az optimális megoldás keresésekor hatalmas az állapottér. Ezért általános módszer, hogy valamely *x* állapotnak az *e* alaphelyzettől való pontos távolságát előre kiszámítják. Ezzel egy alsó becslést lehet felírni az optimális megoldás hosszára.

Szimmetriák

A kockának igen nagy szimmetriacsoportja van. Ha egy adott állapotot fizikailag elforgatunk, akkor matematikailag sokszor ugyanannak a problémának egy szimmetrikus változatát kapjuk. Ez lehetővé teszi, hogy több állapot vizsgálata ne feltétlenül négy különálló problémaként szerepeljen. Isten számának a bizonyításában a szimmetriák alkalmazása alapvető szerepet játszott.

Nagyobb (n×n×n méretű) Rubik-kockák

Az Isten száma nem ismert pontos képletként minden (n)-re. Demaine, Eisenstat, Lubiw és Winslow bebizonyították, hogy az n×n×n méretű Rubik-kockára vonatkozó Isten számnak a nagyságrendje

$$\Theta(n^2 / \log n),$$

Az asszimptotika alsó korlátja kombinatorikus megszámlálási érvből, felső korlátja pedig algoritmikai konstrukcióból következik. Ez az eredmény nagyon szép kapcsolatot fejez ki a kombinatorika, gráfelmélet és algoritmuselmélet között.

Az n×n×n méretű Rubik-kockára állapotterének pontos mérete az irodalomban és a „The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences” (rövidítve OEIS) adatbázisban n= 5-ig található meg:

1,
3674160,
43252003274489856000,
7401196841564901869874093974498574336000000000,
282870942277741856536180333107150328293127731985672134721536000000000000000000

Valószínűségszámítás és „véletlen” kocka

Újabb kutatási irány annak becslése, hogy egy hatalmas Cayley-gráfban milyen messze lehet a legtávolabbi pont.

So Hirata 2024-ben valószínűségszámítási modellt alkalmazott a Rubik-csoportok átmérőjének becslésére. A modell a konfigurációk számát és az effektív elágazási tényezőt használja; a becslés egyik formája:

$$\ln N / \ln r + \ln N / r.$$

A módszer a 2×2×2 és 3×3×3 ismert értékeit meglehetősen jól közelíti; a 4×4×4-re 41, az 5×5×5-re 58 értéket becsül. Ezek nem bizonyított Isten számok, hanem valószínűségi becslések.

Komplexitáselmélet

Demaine és munkatársai kimutatták, hogy bizonyos általánosított Rubik-típusú problémákban az optimális megoldás keresése NP-nehéz lehet. Konkrétan egy n×n×1 változatban, ha a megoldottság megítélésénél bizonyos elemeket és színeket figyelmen kívül hagyunk, az optimális megoldás megtalálása NP-nehézzé válik. Hangsúlyozzuk, hogy ezt az eredményt egy kisebb: nxnx1 méretű alakzatra bizonyították, melyből nem következik, de erősen valószínűsíthető az nxnxn méretű Rubik-kocka kirakásának NP-nehézsége

Információelmélet

Az állapottér méretének $4{,}3252\times10^{19}$ értékéből az következik, hogy egy véletlen állapot azonosításához nagyjából

$$\log_2(4.3252\times10^{19}) \approx 65{,}3$$

bit információ szükséges. Ez egy nagyon szép kapcsolat az információelmélethez. A Rubik-kocka tehát körülbelül 65 bitnyi információt hordoz az állapotáról.

Összefoglalás

A Rubik-kocka egy véges, nem kommutatív csoport, amelyhez természetes módon hozzárendelhető egy Cayley-gráf; a kocka optimális megoldása ebben a gráfban a kezdőállapot és az identitás közötti legrövidebb út, az Isten száma pedig ennek a gráfnak az átmérője.

És ebből szinte magától következik a matematika több ága: a csoportelmélet adja a struktúrát, a kombinatorika az állapotszámot, a gráfelmélet a távolságot, az algoritmuselmélet a keresést, a számításelmélet pedig azt vizsgálja, hogy mindez milyen erőforrással végezhető el.

A 3×3×3 méretű Rubik-kockára az Isten száma = 20 bizonyítása ennek különösen szép csúcspontja: a mintegy $4{,}3252\times10^{19}$ állapotból álló gráf átmérőjét csoportelméleti koszetekkel, szimmetriákkal és hatalmas számítógépes kereséssel sikerült pontosan meghatározni.

II. rész. Isten algoritmusa részletesen

3. A 3x3x3-as Rubik kockáknál kisebb méretű hasonló játékok esete

A legkisebb méretek esetén nagyképűség lenne Isten algoritmusáról vagy Isten számáról beszélni, mivel ezek az esetek emberi erővel is könnyűszerrel megoldhatók. A teljesség kedvéért mégis ezekkel az esetekkel kezdjük a tárgyalást.

- Az 1x1x1 méret triviális. Mivel egyetlen lehetséges konfiguráció van, ezért a rá vonatkozó „Isten száma”

$$G(1,1,1) = 0.$$

- A 2x1x1 méretű, a Randelshofer-féle virtuális kockák közé tartozó ún. *Boob Cube*-ra

$$G(2,1,1) = 1.$$

  (Randelshofer-féle „virtuális kockák” alatt Werner Randelshofer olyan számítógépes programja és webes gyűjteménye értendő, amelyben különböző Rubik-kockák és kuboidok mechanikáját, állapotait és megoldását lehet szimulálni. A virtuális jelző tehát itt azt jelenti, hogy nem fizikai kirakóról, hanem számítógépen reprezentált és forgatható puzzle-ről van szó.)

- A 2x2x1 méretű, szintén a Randelshofer-féle virtuális kockák közé tartozó alakzat esetére is könnyen bizonyítható, hogy

$$G(2,2,1) = 1.$$

- A 3x2x1 méretű alakzat esetén csak 180 fokos forgatásoknak van értelme. Negyedfordulatokat azért nem lehet önálló lépésként végrehajtani, mert azok a téglatest alakját megbontanák. Be lehet látni, hogy a négy sarokkocka tetszőlegesen permutálható, a sarokkockák orientációját viszont nem kell külön megszámolni, hiszen ennél a játéknál a geometria és a megengedett mozgások miatt a sarokkockák orientációja nem jelent önálló szabadsági fokot. Van viszont egy bináris orientációs lehetőség az egyik középső élkockánál. Ezért az állapotok lehetséges száma $4!\times 2=48$.| Isten száma pedig

$$G(3,2,1) = 6.$$

- A 3x3x1 méretű ún. *Floppy Cube*-ra vonatkozóan az alakzat értelmezése nem egyértelmű. Az értelmezés attól függ, hogy a konstrukció lehetővé tesz-e negyedfordulatot is, vagy csak félfordulatot enged meg a négyzetes lapon. Tekintsük alapértelmezésnek az előbbi esetet, amit *Super Floppy*nak is szokás nevezni.

  Ekkor 3 041 280 lehetséges konfiguráció van, Isten száma pedig HTM metrikában

$$G_1(3,3,1) = 15,$$

  QTM metrikában viszont 17.

A hagyományos Floppy Cube esetén, amikor a mechanika csak 180 fokos fordulatokat enged meg, a lehetséges konfigurációk száma csak 192, Isten száma pedig

$$G_2(3,3,1) = 8.$$

Ilyenkor nem különböztethető meg HTM metrika és QTM metrika.

4. A 2×2×2-es *Pocket Cube* esete

A 2×2×2-es méretű *Pocket Cube* esetén az állapottér mérete 3674160. Ez a viszonylag kis állapottér lehetővé teszi, hogy minden egyes állapothoz meg lehessen határozni a kocka kirakásának minimális hosszát. Ebből az is kiderül, tehát erre az esetre még viszonylag könnyen bizonyítható, hogy Isten száma HTM metrikában

$$G(2,2,2) = 11,$$

QTM metrikában pedig 14.

5. A 3×3×2-es *Dominó* esete

A 3×3×2-es méretű Rubik-Dominó esetén az állapottér mérete 406 425 600, Isten száma HTM metrikában

$$G(3,3,2) = 18$$

QTM metrikában pedig 19.

Ezt Jaap Scherphuis teljes számítógépes kereséssel határozta meg.

6. A 3x3x3-as „klasszikus” Rubik kocka esete

Tomas Rokicki és szerzőtársai [10] bebizonyították számítógépes, teljes körű kereséssel, hogy a félfordulatos metrikát (HTM) használva, Isten számának értéke

$$G(2,2,2) = 20.$$

A bizonyítás vázlatos menete: Mint ismeretes, a 3×3×3 kockának

$$43\ 252\ 003\ 274\ 489\ 856\ 000,$$

vagyis közelítőleg

$$4{,}3252 \cdot 10^{19}$$

különböző, fizikailag elérhető állapota van.

Azt, hogy vannak olyan állások, melyek megoldásához legalább 20 lépés kell, tehát Isten algoritmusának 20 egy alsó korlátja, már mások korábban megmutatták. A legismertebb ilyen állás az ún. *Superflip* állás, amely esetén mind a 12 élkocka a saját helyén van, de valamennyi meg van fordítva**.** A sarokkockák pedig közben változatlan helyzetben maradnak.

A felső korlát bizonyításához a kutatók a kocka csoportelméleti struktúráját használták.

A teljes állapottérből egy speciális részcsoportot, a

$$H = \langle \mathrm{F}, \mathrm{S}^2, \mathrm{K}^2, \mathrm{L}, \mathrm{T}^2, \mathrm{N}^2 \rangle.$$

részcsoport kiválasztva, az összes állapotot ennek a részcsoportnak a koszetjeire bontották. Ezáltal 2 217 093 120 koszet keletkezett, amelyek mindegyike 19 508 428 800 állapotot tartalmaz.

A kocka térbeli elforgatásai, valamint tükrözési szimmetriák segítségével a vizsgálandó koszetek száma

55 882 296

Ezek áttekintésére a kutatók egy olyan rendkívül gyors keresőprogramot készítettek, amely egy-egy ilyen koszet összes releváns állását képes volt kezelni. A számítás céljára mintegy 35 CPU-évnyi számítási kapacitást használtak fel, amit a Google számítógépei biztosítottak. A párhuzamos számítás miatt ezt belátható időn belül el tudták végezni.

7. A 3×3×3-as Rubik-kocka távolságeloszlása

A 0–15 közötti távolságokhoz tartozó értékek pontosan ismertek. A 16–20 közötti értékek közül több csak becslés/szimuláció alapján ismert. Mindezt az alábbi táblázatban foglalható össze:

Távolság	**Állások száma**
0	1
1	18
2	243
3	3 240
4	43 239
5	574 908
6	7 618 438
7	100 803 036
8	1 332 343 288
9	17 596 479 795
10	232 248 063 316
11	3 063 288 809 012
12	40 374 425 656 248
13	531 653 418 284 628
14	6 989 320 578 825 358
15	91 365 146 187 124 313
16	$\approx 1{,}1\times10^{18}$
17	$\approx 1{,}2\times10^{19}$
18	$\approx 2{,}9\times10^{19}$
19	$\approx 1{,}5\times10^{18}$
20	$\approx 4{,}9\times10^{8}$

Ide kapcsolódik az a kérdés, hogy hány véletlen mozdulat szükséges ahhoz, hogy egy kocka statisztikailag valóban összekeveredettnek legyen tekinthető. A téma kutatói bebizonyították, hogy a keveredési idő legalább 26 véletlen lépés.

Visszatérve Isten algoritmusára és Isten számára, a HTM metrikára vonatkozó bizonyításhoz hasonlóan bizonyítható, hogy a negyedfordulatos metrikát (QTM) használva, Isten száma = 26. Ennek bizonyítását már nem részletezzük.

8. A 4x4x4 és 5x5x5 méretű Rubik kocka

Ezekre a nagyobb méretű esetekre az állapotok száma igen gyorsan növekszik, az előbbi esetben az $1{,}7\times10^{46}$, az utóbbi esetben pedig a $2{,}6\times10^{74}$ közelítő értékre. Összehasonlításul: a 3x3x3 méretű klasszikus Rubik kocka esetén az állapotok száma „csak” $4{,}3\times10^{19}$. Mivel a klasszikus Rubik kocka esetén is Isten számának a meghatározása céljából 35 CPU-év gépidőt

használtak fel, ezért ne csodálkozzunk, hogy a 4x4x4 és 5x5x5 méretű Rubik kockák esetén Isten száma a földi halandók számára jelenleg ismeretlen és valószínűleg még sokáig ismeretlen marad.

Irodalom

Saját munkák:

[1] KG: A SIMULA solution to the magic cube puzzle, SIMULA Newsletter, 1980

[2] KG: A bűvös kocka matematikája I.-II., KöMaL, 1980. március, május (60. kötet, 3. és 5. szám)

[3] KG, Rubik Ernő, Varga Tamás és még két szerző: A bűvös kocka, Műszaki Könyvkiadó, 1981.

[4] Hódi Endre és KG: Játék és matematika, … és játék, 0. szám (mutatványszám), 1982

[5] KG: Forgatható világ I.-IV., … és Játék, 1-4. szám, 1982

Más szerzők munkái:

[6] Csiszár Imre: A bűvös kocka titkaiból, Élet és tudomány, 1980. május 16.

[7] Varga Tamás: Még egyszer a bűvös kockáról, Élet és tudomány, 1980. július 25.

[8] Singmaster, David: Notes on Rubik's Magic Cube, Enslow Publishers, 1981.

[9] Korf, Richard E.: *Finding Optimal Solutions to Rubik's Cube Using Pattern Databases.* Proceedings of the Fourteenth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-97), Providence, Rhode Island, 1997, pp. 700–705.

[10] Rokicki, Tomas – Kociemba, Herbert – Davidson, Morley – Dethridge, John: *The Diameter of the Rubik's Cube Group Is Twenty.* SIAM Journal on Discrete Mathematics, **27** (2013), No. 2, pp. 1082–1105. DOI: 10.1137/120867366.

[11] Demaine, Erik D. – Demaine, Martin L. – Eisenstat, Sarah – Lubiw, Anna – Winslow, Andrew: *Algorithms for Solving Rubik's Cubes.* arXiv:1106.5736, 2011.

[12] Hirata, So: *Probabilistic estimates of the diameters of the Rubik's Cube groups.* arXiv:2404.07337, 2024.