Gyors megoldások 4 matek zárthelyi néhány feladatára
2010.10.19
Hujter Mihály
hujter.misi@gmail.com

1. Bizonyítandó teljes indukcióval $n = 2, 3, ...$-ra, hogy

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{6}{5}\sqrt{n}$$

Megoldás: A bal oldalból a jobb oldal $n = 2$-re:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{6}{5}\sqrt{2} = 1 - \frac{7\sqrt{2}}{10} = 1 - \frac{\sqrt{98}}{10} > 0$$

Az n-ről $(n+1)$-re való átmenetkor a bal oldal növekedése minusz a jobb oldal növekedése:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{6}{5}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ > \quad & \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = \frac{2}{5\sqrt{n+1}} > 0 \end{aligned}$$

2. Bizonyítandó teljes indukcióval $n = 2, 3, ...$-ra, hogy

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Megoldás: A jobb oldalból a bal oldal $n = 2$-re:

$$2 - \frac{1}{2} - \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} > 0$$

Az n-ről $(n+1)$-re való átmenetkor a jobb oldal növekedése minusz a bal oldal növekedése:

$$2 - \frac{1}{n+1} - \left(2 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n\,(n+1)^2} > 0$$

3. Bizonyítandó teljes indukcióval $n = 2, 3, ...$-ra, hogy

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Megoldás: A bal oldal per a jobb oldal $n = 2$-re:

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{18}}{4} > 1$$

Az n-ről $(n+1)$-re való átmenetkor a bal oldal növekedési aránya per a jobb oldal növekedési aránya:

$$\begin{aligned}\frac{2n+1}{2(n+1)} \quad : \quad \frac{\frac{1}{2\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} &= \frac{2n+1}{2(n+1)} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} \\ &= \frac{2n+1}{2(n+1)} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}} \\ &= \sqrt{\frac{(2n+1)^2}{4n^2+4n}} = \sqrt{\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+4n}} > 1\end{aligned}$$

4. Bizonyítandó teljes indukcióval $n = 2, 3, ...$-ra, hogy

$$2\sqrt{n+1} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Megoldás: A jobb oldalból a bal oldal $n = 2$-re:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2+1} + 2 \approx 0.24$$

Az n-ről $(n+1)$-re való átmenetkor a jobb oldal növekedése minusz a bal oldal növekedése:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \left(2\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1}\right) &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \\ &> \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}} = 0\end{aligned}$$

5. Milyen c-re lesz $x_1 = 2$ gyöke az $x^4 - 2x^2 - 3x + c$ polinomnak, és mik a többi valós gyökök?

Megoldás: x helyére $(y + x_1)$-et írunk; ennek gyöke lesz $y_1 = 0$:

$$\begin{aligned}x^4 - 2x^2 - 3x + c &= (y+2)^4 - 2(y+2)^2 - 3(y+2) + c \\ &= y^4 + 8y^3 + 22y^2 + 21y + c + 2\end{aligned}$$

Tehát $c + 2 = 0$, azaz $c = -2$. Ekkor

$$\begin{aligned}x^4 - 2x^2 - 3x + c &= x^4 - 2x^2 - 3x - 2 \\ &= y^4 + 8y^3 + 22y^2 + 21y = y(y^3 + 8y^2 + 22y + 21)\end{aligned}$$

Az $y^3 + 8y^2 + 22y + 21$ polinomba visszaírva, hogy $y = x - 2$, ezt kapjuk:

$$(x-2)^3 + 8(x-2)^2 + 22(x-2) + 21 = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

Rögtön látszik, hogy ennek gyöke $x_2 = -1$. Most beírva x helyére $z+x_2$ értékét:

$$(z-1)^3 + 2(z-1)^2 + 2(z-1) + 1 = z^3 - z^2 + z = z(z^2 - z + 1)$$

Itt $z^2 - z + 1$ diszkriminánsa negatív, tehát nincs több gyök.

6. Milyen c-re lesz $x_1 = -1$ gyöke az $x^4 - 2x^2 - 3x + c$ polinomnak, és mik a többi valós gyökök?

Megoldás: x helyére $(y + x_1)$-et írunk; ennek gyöke lesz $y_1 = 0$:

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^2 - 3x + c &= (y-1)^4 - 2(y-1)^2 - 3(y-1) + c \\ &= y^4 - 4y^3 + 4y^2 - 3y + c + 2 \end{aligned}$$

Tehát $c + 2 = 0$, azaz $c = -2$. Ekkor

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^2 - 3x + c &= x^4 - 2x^2 - 3x - 2 \\ &= y^4 - 4y^3 + 4y^2 - 3y = y(y^3 - 4y^2 + 4y - 3) \end{aligned}$$

Itt az $y^3 - 4y^2 + 4y - 3$ polinomba visszaírva, hogy $y = x + 1$, ezt kapjuk:

$$(x+1)^3 - 4(x+1)^2 + 4(x+1) - 3 = x^3 - x^2 - x - 2$$

Rögtön látszik, hogy ennek gyöke $x_2 = 2$. Most beírva x helyére $z + 2$ értékét:

$$(z+2)^3 - (z+2)^2 - (z+2) - 2 = z^3 + 5z^2 + 7z = z(z^2 + 5z + 7)$$

Itt $z^2 + 5z + 7$ diszkriminánsa negatív, tehát nincs több gyök.