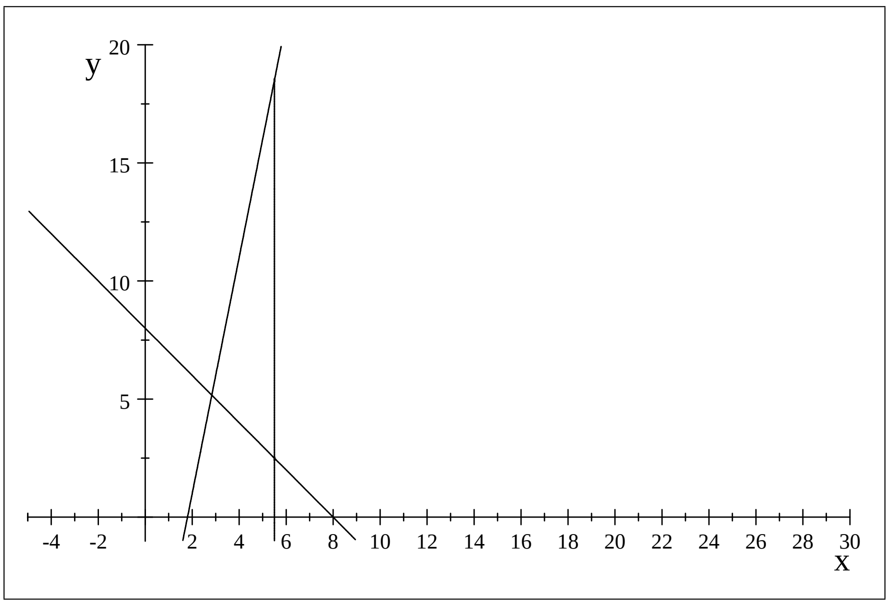
1. A következő ábrán az $x_1, x_2 \geq 0$; $x_1 + x_2 \leq 8$; $2x_1 \leq 11$; $5x_1 - x_2 \leq 9$ feltételrendszert ábrázoljuk. Alakítsa át a feltételrendszert egyenletrendszerré. Jelölje be a rajzon azt a bázismegoldást, amely NEM megengedett, de melyen az alábbi célfüggvény értéke a lehető legnagyobb! Írja fel ennek a nem megengedett bázismegoldásnak mind az öt komponensét!

Célfüggvény: $( \ldots \;\; x_1 + \; \ldots \;\; x_2) \to \max$

(A célfüggvénybe $x_1$ és $x_2$ együtthatóinak pozitív egész számok vannak beírva.)




Megoldás: Az egyenletrendszer $Ax = b$ ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$x^T = [x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5]$$

Részletesen kiírva:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + x_4 &= 11 \\ 5x_1 - x_2 + x_5 &= 9 \end{aligned}$$

Az együtthatómátrix rangja: 3; az $3 \times 3$-as almátrixok darabszáma: $\binom{5}{3} = 10$. Az egyik ilyen almátrix rangja azonban csak 2, tehát a bázismegoldások darabszáma: 9. Ezek közül 4 darab a megengedett, azaz nemnegatív bázismegoldás; ezek az origótól jobbra fent található négyszög csúcsai. A nem megengedett bázismegoldások közül egy nem látszik az ábrán; ez lenne az $x_2$-tengely és az $5x_1 - x_2 = 9$ egyenes metszéspontja, ami az ábra alá kerülne . Ez a bázismegoldás: $[0; -9; 17, 11, 0]$. Az $x_1$-tengelyen is van két nem megengedett bázismegoldás: $[5.5; 0; 2.5, 0, -18.5]$ és $[8; 0; 0; -5; -1]$. További két nem megengedett bázismegoldás van a $2x_1 = 11$ egyenletű függőleges egyenesen: $[5.5; 2.5; 0; 0; -25]$ és $[5.5; 18; -15.5; 0; 0]$. A felsorolt öt nem megengedett bázismegoldás közül kell kiválasztani azt, amelyiken a legkedvezőbb a célfüggvény értéke. Mivel azonban a célfüggvény együtthatói pozitívak, a legjobb célfüggvényértékű nem megengedett bázismegoldás vagy $[8; 0; 0; -5; -1]$ vagy $[5.5; 18; 0; -14.5; 0]$. Győzzön a jobbik! (Például, ha a célfüggvény: $7x_1 + 5x_2$, akkor $[5.5; 18; -15.5; 0; 0]$ győz.)

2. A fenti feladatban cserélje ki a ...... számot ....-re, és oldja meg a feladatot szimplex módszerrel.

Megoldás (minta, ha a 9 szám van 10-re cserélve, és a célfüggvény: $7x_1 + 5x_2$):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 11 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 10 | (5) | $-1$ | 0 | 0 | 1 |
| 0 | $-7$ | $-5$ | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | (1.2) | 1 | 0 | $-0.2$ |
| 7 | 0 | 0.4 | 0 | 1 | $-0.4$ |
| 2 | 1 | $-0.2$ | 0 | 0 | 0.2 |
| 14 | 0 | $-6.4$ | 0 | 0 | 1.4 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0 | 1 | $\frac{5}{6}$ | 0 | $\frac{-1}{6}$ |
| ... | 0 | 0 | ... | 1 | ... |
| 3 | 1 | 0 | ... | 0 | ... |
| 46 | 0 | 0 | +... | 0 | +... |

Az optimális megoldás (a mintaadatokra): $x_1 = 3$, $x_2 = 5$.

3. Végezze el a kétfázisú szimplex módszer első fázisát a következő feltételrendszerre: $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = ...$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = ...$$

(Itt a pontok helyén pozitv számok állnak, a felső nagyobb, mint az alsó.)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | 1 | -2 | 1 | -2 | 1 | 0 |
| ... | (1) | 2 | -1 | 5 | 0 | 1 |
| ... | -2 | 0 | 0 | -3 | 0 | 0 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | 0 | -4 | (2) | -7 | 1 | -1 |
| ... | 1 | 2 | -1 | 5 | 0 | 1 |
| ... | 0 | 4 | -2 | 7 | 0 | 2 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | 0 | -2 | 1 | ... | ... | ... |
| ... | 1 | 0 | 0 | ... | ... | ... |
| ... | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

4. Keresse meg duál szimplex módszerrel azokat a nemnegatív $x_1$ és $x_2$ racionális számokat, melyek összege a lehető legkisebb, és melyekre fennáll a következő három egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq \ldots \\ x_1 - 2x_2 &\geq \ldots \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq \ldots \end{aligned}$$

(Itt a pontok helyén pozitív számok állnak 1:2:3 arányban, mondjuk $s, 2s, 3s$)

| 0 | -1 | -1 |
|---|---|---|
| 0 | -1 | 0 |
| 0 | 0 | -1 |
| $s$ | 1 | 3 |
| $-2s$ | (-1) | 2 |
| $3s$ | 3 | 4 |

| $2s$ | -1 | -3 |
|---|---|---|
| $2s$ | -1 | -2 |
| 0 | 0 | -1 |
| $s$ | 1 | 5 |
| 0 | -1 | 0 |
| $-3s$ | 3 | 10 |

Látható, hogy NINCS megengedett megoldás!