

Korlátozás és szétválasztás a hátizsákra

Ez a kézirat a <http://www.math.bme.hu/~hujter/bb.ps> fájlban található.

(Az előzményért a <http://www.math.bme.hu/~hujter/beccs.ps> helyre érdemes ellátogatni.)

Az úgynevezett *hátizsák* feladatot a következőképpen értjük: Adottak az $n, a_1, \dots, a_n, b, c_1, \dots, c_n$ pozitív egész számok. Legyenek továbbá $x_1, \dots, x_n$ a $\{0, 1\}$ halmaz elemei. A $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ összeg maximumát keressük, ahol $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b$. Feltesszük, hogy a

c_1	c_2	$\dots$	c_n
a_1	a_2	$\dots$	a_n

mátrixban a j -edik oszlop a közvetlenül utána lévő oszloppal együtt nemnegatív determinánsú mátrixot alkot minden $j = 1, 2, \dots, n-1$ esetén. (Ez a feltétel egyenértékű azzal, hogy a c_i/a_i számok monoton nemcsökkenő sorozatot alkotnak.) Legyen $r = 0$ ha $a_1 > b$ és máskülönben legyen r az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaznak a legnagyobb eleme, melyre $a_1 + a_2 + \dots + a_r \leq b$. Alkalmazni fogjuk azt a tételt, mely szerint a $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ kifejezés legnagyobb értéke:

$$C_r = c_1 + c_2 + \dots + c_r$$

minden olyan esetben, amikor $r = n$, vagy $a_1 + a_2 + \dots + a_r = b$, vagy $c_{r+1}(b - (a_1 + a_2 + \dots + a_r)) < b_{r+1}$. Ilyenkor egy optimális megoldás: $x_1 = x_2 = \dots = x_r = 1$, a többi $x_j = 0$. (Természetesen C_0 értékén nullát értünk.) Ha pedig a három feltétel egyike sem teljesül, akkor a z kifejezés lehető legnagyobb értékére a $\max z$ jelölés alkalmazásával annyit mondhatunk, hogy $(\max z) - C_r$, ami egy nemnegatív egész szám, legfeljebb a $c_{r+1}(b - (a_1 + a_2 + \dots + a_r))/b_{r+1}$ pozitív hányados egész része. Ezt az utóbbi nemnegatív egész számot úgy hívjuk, hogy *hézag*, (angolul: *gap*), és úgy jelöljük, hogy γ_r . Azt, amikor a fentieket alkalmazzuk a

c_1	c_2	$\dots$	c_n	
a_1	a_2	$\dots$	a_n	b

alakban megadott hátizsákfeladatra, és a

$$\max z \leq C_r + \gamma_r$$

becslést nyerjük, úgy mondjuk, hogy ez a *korlátozás*.

Példa. Adjunk optimális megoldást vagy korlátozást a következő adatokkal definiált hátizsák feladatra!

3	10	15	7	5	
20	81	122	63	93	300

Megoldás: Mindenekelőtt ellenőrizzük, hogy a determinánsok rendben vannak-e: valóban $3 \cdot 81 - 20 \cdot 10, 10 \cdot 122 - 81 \cdot 15, 15 \cdot 63 - 122 \cdot 7, 7 \cdot 93 - 63 \cdot 5$ mindegyike nemnegatív. Kiszámítjuk: $r = 4$, mert $20 + 81 + 122 + 63 = 286 < 300$, de $286 + 93 = 379 > 300$. Következésképpen: $\gamma_4 = [5 \cdot (300 - 286)/93] = 0$. Ezért $\max z = C_4 = 3 + 10 + 15 + 7 = 35$ és egy optimális megoldás: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1, x_5 = 0$.

Példa. Adjunk optimális megoldást vagy korlátozást a következő adatokkal definiált hátizsák feladatra!

30	19	13	38	20	8	
15	12	9	27	15	8	62

Megoldás: Mindenekelőtt ellenőrizzük, hogy a determinánsok rendben vannak-e: valóban $30 \cdot 12 - 15 \cdot 19, 19 \cdot 9 - 12 \cdot 13, 13 \cdot 27 - 9 \cdot 38, 38 \cdot 15 - 27 \cdot 20, 20 \cdot 8 - 15 \cdot 8$ mindegyike nemnegatív. Kiszámítjuk: $r = 3$, mert $15 + 12 + 9 = 36 < 62$, de $36 + 27 > 62$. Következésképpen: $\gamma_3 = [38 \cdot (62 - 36)/27] = 36$. Másrészt $C_3 = 30 + 19 + 13 = 62$. Ezért most a $\max z \leq 62 + 36 = 98$ korlátozást nyerjük.

Ami most következik, az úgy hívjuk, hogy *szétválasztás*. Mivel az utóbbi példánál nem kaptuk meg az optimális megoldást, két esetet fogunk vizsgálni. Kiragadunk egyet az $x_1, x_2, \dots, x_r$ változók közül. Hogy melyiket, tulajdonképpen mindegy. Valaki a legelsőt veszi ki, valaki a legutolsót. Vegyük ki mondjuk a

legelsőt. Ez tehát: x_1 . Most két esetet külön fogunk vizsgálni: $x_1 = 0$ vagy $x_1 = 1$. Látható, hogy az $x_1 = 0$ esetben az eredeti feladat lezsugorodik a következő feladatra:

19	13	38	20	8	
12	9	27	15	8	62

Erre alkalmazva a korlátozást most $r = 3$, mert $12 + 9 + 27 = 48 < 62$, de $48 + 15 > 62$. Mivel most $[20 \cdot (62 - 48)/15] = 18$, ezért ebben a esetben a $\max z \leq (19 + 13 + 38) + 18 = 88$, korlátozást nyerjük. Mivel itt a felső korlát kisebb, mint az előbb megkapott felső korlát, ezért most figyelmünket az $x_1 = 1$ eset felé fordítjuk.

Most tehát $x_1 = 1$, és két alesetet vizsgálunk: $x_2 = 0$ vagy $x_2 = 1$. Az $x_2 = 0$ esetben az eredeti feladat a

30	13	38	20	8	
15	9	27	15	8	62

feladatra zsugorodik, melynél $r = 3$, mert $15 + 9 + 27 = 51$, de $51 + 15 > 62$. Most $[20 \cdot (62 - 51)/15] = 14$. Tehát a korlátozás: $\max z \leq (30 + 13 + 38) + 14 = 95$.

Pillanatnyilag az $x_1 = 1, x_2 = 1$ esetre korábban megkapott $\max z \leq 98$ korlátozás az eddigiek közül még mindig a legnagyobb felső becslés. Ezért most az $x_1 = 1, x_2 = 1$ esetet bontjuk tovább: $x_3 = 0$ vagy $x_3 = 1$. Ha $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$, akkor az eredeti feladatból ez marad:

30	19	38	20	8	
15	12	27	15	8	62

Most is $r = 3$, mert $15 + 12 + 27 = 56 < 62$, de $56 + 15 > 62$. Másrészt $[20 \cdot (62 - 56)/15] = 10$, így a $\max z \leq (30 + 19 + 38) + 10 = 97$ korlátozást nyerjük.

Tehát pillanatnyilag a legnagyobb felső felső becslés az $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ esetben van, éspedig 98. Mivel azonban $(15 + 12 + 9) + 27 > 62$, csak az lehet, hogy $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ esetén $x_4 = 0$. De ha $x_4 = 0$, akkor az eredeti feladat a következőre zsugorodik:

30	19	13	20	8	
15	12	9	15	8	62

Tekintettel arra, hogy $15 + 12 + 9 + 15 + 8 = 59 < 62$, ebben az esetben tudjuk, hogy $\max z = 30 + 19 + 13 + 20 + 8 = 90$. Ehhez tehát az $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 1$ megoldás tartozik. Vigyáznunk kell azonban, mert a többi korlátozás között még van olyan, melyben a felső becslés nagyobb, mint 90. Ezért a figyelmünket most az életben maradt felső becslések közül a legnagyobbra fordítjuk. Ez az $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$ esetben a 97 volt.

Most ezt az esetet választjuk szét: $x_4 = 0$ vagy $x_4 = 1$. Az előbbi esetben az eredeti feladat a következőre zsugorodik:

30	19	20	8	
15	12	15	8	62

Tekintettel arra, hogy $15 + 12 + 15 + 8 < 62$, itt $\max z = 30 + 19 + 20 + 8 = 77$, de ezt elfelejtjük, mert ennél már jobb megoldásunk is volt a korábbiakban. Marad tehát az utóbbi eset, amikor is $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1$. Most viszont $x_5 = 1$ lehetetlen, mert $15 + 12 + 27 + 15 > 62$. Így $x_5 = 0$, és ekkor az eredeti feladatból ez marad:

30	19	38	8	
15	12	27	8	62

Itt $15 + 12 + 27 + 8 = 62$, ezért $\max z = 30 + 19 + 38 + 8 = 95$. A korábbi korlátozásaink alapján pedig látjuk, semmilyen más esetben sem lehet ennél nagyobb a $\max z$. A végeredmény tehát: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 1$.