Becslés egy hátizsák tartalmának összhasznára

Ez a kézirat a `http://www.math.bme.hu/~hujter/becs.ps` fájlban található.
(A hozzá tartozó színes ábrákért a `http://www.math.bme.hu/~hujter/becs.gif` helyre érdemes ellátogatni.)

Adottak az $n, a_1, \ldots, a_n, b, c_1, \ldots, c_n$ pozitív egész számok. Legyenek továbbá $x_1, \ldots, x_n$ a $\{0, 1\}$ halmaz elemei. Egy olyan felső becslést szeretnénk a $c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$ számra, mely nem függ az $x_1, \ldots, x_n$ értékektől. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \ldots \geq \frac{c_n}{a_n}$. Ezt másképpen úgy is mondhatnánk, hogy a

$$\boxed{\begin{matrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{matrix}}$$

mátrixban minden 2×2 méretű determináns nemnegatív.
Legyen $r = 0$ ha $a_1 > b$ és máskülönben legyen r az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak a legnagyobb eleme, melyre $a_1 + a_2 + \ldots + a_r \leq b$.

Tétel: Ha $r = n$ vagy $a_1 + a_2 + \ldots + a_r = b$, akkor a $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ kifejezés legnagyobb értéke:

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_r$$

Minden más esetben pedig $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ értéke legfeljebb

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_r + c_{r+1}\frac{b - (a_1 + a_2 + \ldots + a_r)}{a_{r+1}}$$

Ezt a tételt úgy szemléltetjük, mint becslést egy hátizsák tartalmának összhasznára. Adott ugyanis n darab tárgy, melyek mindegyikéről külön-külön eldönthetjük, hogy beletesszük-e a hátizsákba, vagy sem. A j-edik tárgy súlya a_j, a haszna c_j. A súly is, a haszon is csak akkor realizálódik, ha a tárgyat beletesszük a hátizsákba, azaz ha $x_j = 1$. A hátizsákba legfeljebb b összsúlyú tárgy rakható.
Geometriailag úgy képzeljük, a tárgyak olyan téglalapok, melyek oldalai vízszintesek és függőlegesek, a j-edik tégla a_j széles és c_j területű. A téglákat állítva kell betenni a hátizsákba, ami maga is egy téglalap b szélességgel, a magasságára pedig nincs korlát. A betett téglák mindegyikét a zsák fenekére kell tenni, a különböző téglákat egymás mellé, az indexük szerint növekvő sorrendben balról jobbra. Az a tégla kerül tehát a bal alsó sarokba, melynek melynek j indexére $x_1 = x_2 = \ldots = x_{j-1} = 0$ és $x_j = 1$. Közvetlenül jobbról melléje kerül az a tégla, melynek k indexére teljesül $j < k$, $x_k = 1$, továbbá $x_i = 0$ minden $j < i < k$ esetén.
Most képzeletben készítünk tetőt a hátizsáknak. A bal szélétől c_1/a_1 magasságban húzunk egy vízszintest jobbra a_1 hosszan. Aztán lefele lépünk c_2/a_2 magasságig, és onnan húzunk egy vizszintest jobbra a_2 hosszúságban. És így tovább. Végül az n-edik vízszintest ne csak a_n hosszúságban, hanem $\max\{a_n, b-(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})\}$ hosszúságban húzzuk. (Lehet, hogy ez a tető jobbra túlnyúlik a hátizsák jobboldali falán.)
Gondoljuk meg, akárhány tárgyat és akármelyik tárgyakat is rakjuk a hátizsákba, ha azok beférnek, akkor beférnek a tető alá is! A hátizsákban a tető alatti összes terület pedig éppen annyi, mint amit a tételünk képletei adnak. Ezzel beláthatjuk a tétel igaz voltát.
A mellékelt ábra a következő adatokhoz tartozik: $n = 5$, $b = 300$ és

j	1	2	3	4	5
c_j	3	10	15	7	5
a_j	20	81	122	63	93
c_j/a_j	.1500	.1235	.1230	.1111	.0538