Állítás: $n = 0, 1, 2, ...$ esetén

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Megjegyzés: Mivel ismerten $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, ezért a fenti állítás így is írható:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$$

Bizonyítás: $n = 0$ esetén a bal oldalon üres összeg áll, aminek az értéke 0. A jobb oldal is nyilván 0.

Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha n-ről $(n+1)$-re térünk át, akkor a bal oldal növekedése: $(n+1)^3$. Azt kell megmutatnunk, hogy a jobb oldal növekedése is ennyi. A jobb oldal növekedését az $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ képlet alapján így írhatjuk:

$$\begin{aligned}
&(1 + 2 + 3 + ... + n + n + 1)^2 - (1 + 2 + 3 + ... + n)^2 \\
&= (n+1)(2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + n) + n + 1) \\
&= (n+1)\left(2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n + 1\right) = (n+1)(n+1)^2 \\
&= (n+1)^3
\end{aligned}$$

Kérdés: Ha $abc = 18$, akkor mennyi lehet $a^2 + b^2 + c^2$ minimuma?

Megoldás: Mivel $abc = 18$, ezért $a^2b^2c^2 = 18^2$. Így a^2, b^2, c^2 mértani közepe legalább $\sqrt[3]{18^2}$. A számtani közép is legalább annyi, azaz

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \sqrt[3]{18^2}$$

Tehát

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{18^2} = \sqrt[3]{8748} \approx 20.6$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a^2 = b^2 = c^2 = \sqrt[3]{18^2}$, azaz ha a, b, c között vagy 1 vagy 3 darab pozitív szám van, és $|a| = |b| = |c| = \sqrt[3]{18}$.