Az n-dimenziós szabályos szimplex megadása egyenlőtlenségekkel

Hujter M. `hujter@math.bme.hu` 2009.03.06.

Az első n darab csúcs legyen: $n(n+1)\mathbf{e}_i$, ahol $\mathbf{e}_i$ az i-edik egységvektor, $i = 1, 2, ..., n$. Ezen csúcsok közül bármely kettő távolsága egyenlő, mégpedig: $\sqrt{2n^2(n+1)^2} = n(n+1)\sqrt{2}$. Valamely $d > 0$ számra olyan alakban keressük az $(n+1)$-edik csúcsot, hogy minden koordinátája egyformán $-d$ legyen. Ennek az új csúcsnak a távolsága a régiek mindegyikétől:

$$\sqrt{(n(n+1)+d)^2 + (n-1)d^2}$$

Megoldjuk d-re, hogy a fenti $n(n+1)\sqrt{2}$-vel legyen egyenlő:

$$\begin{aligned} (n(n+1)+d)^2 + (n-1)d^2 &= 2n^2(n+1)^2 \\ d &= \sqrt{(n+1)^3} - n - 1 \end{aligned}$$

Tehát az $(n+1)$-edik csúcs mindegyik koordinátája: $n+1-(n+1)^{1.5}$.

Ellenőrzés:

$$\left(n(n+1) + \left(\sqrt{(n+1)^3} - n - 1\right)\right)^2 + (n-1)\left(\sqrt{(n+1)^3} - n - 1\right)^2$$
$$= 2n^4 + 4n^3 + 2n^2 = 2n^2(n+1)^2$$

Ez így szép és jó, a szimplexünk szabályos, de hiába van az origó körül és hiába egyenlő mind az $\binom{n}{2}$ éle, a súlypontja nem az origó! A súlypont mindegyik koordinátája ugyanis:

$$\frac{n(n+1) + \ n+1 - \sqrt{(n+1)^3}}{n+1} = n+1-\sqrt{n+1}$$

Mind az $n+1$ csúcsnál mind az n koordinátából levonunk tehát ennyit. Az első n pont közül az i-ediknek az i-edik koordinátája tehát ez lesz:

$$n(n+1) - \left(n+1-\sqrt{n+1}\right) = n^2 + \sqrt{n+1} - 1$$

míg a többi koordináta:

$$\sqrt{n+1} - n - 1$$

Az $(n+1)$-edik pont mindegyik koordinátája pedig ez lesz:

$$\begin{aligned} &-d - \left(n+1-\sqrt{n+1}\ \right) = \ n+1-\sqrt{(n+1)^3} - \left(n+1-\sqrt{n+1}\ \right) \\ &= \sqrt{n+1} - \sqrt{(n+1)^3} = -n\sqrt{n+1} \end{aligned}$$

Ellenőrizzük, hogy tényleg kijön-e az origóra a súlypont; azaz mindegyik i-re az i-edik koordináták összege:

$$\left(n^2 + \sqrt{n+1} - 1\right) + (n-1)\left(\sqrt{n+1} - n - 1\right) + \left(-n\sqrt{n+1}\right) = 0$$

Van tehát egy szabályos szimplexünk origó középponttal. Az $n+1$ féltér meghatározása következik, mely félterek metszete a szimplex. Az $(n+1)$-edik csúcsot belsejében tartalmazó féltér egyenlőtlenségként való felírása könnyű:

$$x_1 + ... + x_n \leq n\sqrt{n+1}$$

hiszen ez az a lineáris egyenlőtlenség, amit az első n csúcspont elégít ki egyenlőségként. Itt a jobboldal úgy jött ki, hogy $n^2 + \sqrt{n+1} - 1 + (n-1)(\sqrt{n+1} - n - 1) = n\sqrt{n+1}$.

Most meghatározzuk az első csúcsponttal „szembeni” egyenlőtlenséget. Ez szimmetriaokokból

$$ax_1 + b(x_2 + ... + x_n) \leq c$$

alakú valamely a, b, c számokra. Mivel az origó a szimplex belsejében van, ezért $c > 0$. Ugyanakkor a és b számok választhatók az első kivételével a összes csúcs, mint vektor, összege első és második koordinátájának, hiszen ezen n darab csúcs összege az első csúccsal szembeni hiperlap normálvektora. Tehát:

$$\begin{aligned} a &= (n-1)(\sqrt{n+1} - n - 1) + (-n\sqrt{n+1}) = 1 - n^2 - \sqrt{n+1} \\ b &= \left(n^2 + \sqrt{n+1} - 1\right) + (n-2)(\sqrt{n+1} - n - 1) + (-n\sqrt{n+1}) \\ &= n + 1 - \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

A c számot pedig úgy határozhatjuk meg, hogy figyelembe vesszük, ogy az $(n+1)$-edik pont egyenlőséggel elégíti az egyenlőtlenséget, tehát

$$\begin{aligned} c &= (a + (n-1)b)(-n\sqrt{n+1}) \\ &= (1 - n^2 - \sqrt{n+1} + (n-1)(n+1-\sqrt{n+1}))(-n\sqrt{n+1}) = n^2(n+1) \end{aligned}$$

A második egyenlőtlenségünk tehát:

$$\left(1 - n^2 - \sqrt{n+1}\right) x_1 + \left(n + 1 - \sqrt{n+1}\right)(x_2 + ... + x_n) \leq n^2(n+1)$$

A többi $n-1$ egyenlőtlenség — tehát a második, harmadik, ..., n-edik csúccsal szembeni — ennek mintájára könnyen felírható.

Megjegyzés: Ha $n+1$ négyzetszám, akkor a fenti egyenlőtlenségek lényegesen leegyszerűsödnek. Például három dimenzióban ezt a négyet kapjuk, ha még egyszerűsítünk is 2-vel:

$$\begin{aligned} -5x_1 + \ x_2 + \ x_3 &\leq 18 \\ x_1 - 5x_2 + \ x_3 &\leq 18 \\ x_1 + \ x_2 - 5x_3 &\leq 18 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 6 \end{aligned}$$

Ellenőrzésnek elegendő azt észrevenni, hogy az utolsó egyenlőtlenséget 3-mal felszorozva mind a négy normálvektor $3\sqrt{3}$ hosszú, és bármely két normálvektor skalárszorzata -9.